Facultad de Ciencias Exactas
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CENTRO DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES

TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Repaso de Probabilidades y Estadística
Muestreo computacional

INGENIERÍA DE SISTEMAS

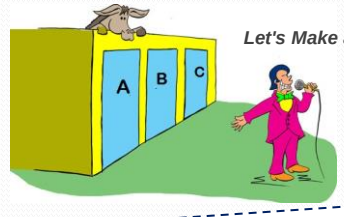
Cursada 2016

PROBABILIDADES

- En situaciones de aleatoriedad (incertidumbre sobre el resultado)
- → se puede asignar un valor (probabilidad) asociado al grado de certeza de que la variable aleatoria analizada tome un cierto valor

Curiosidad

THE MONTY HALL PROBLEM



- ✓ 3 puertas (detrás de una hay un Auto y de las otras sendas cabras)
- ✓ El jugador se lleva el "premio" que está detrás de la puerta elegida

---

- ✓ El jugador debe elegir una puerta
- ✓ El conductor le revela lo que hay en otra de las puertas y le da la posibilidad de cambiar su elección…

¿conviene mantener la elección original?
¿o sería mejor escoger la otra puerta?
¿Hay alguna diferencia?

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

- Espacio muestral *E* = conjunto de posibles resultados que se pueden obtener del experimento

  Arrojar 1 dado: E = {1,2,3,4,5,6} *6 casos*

  Arrojar 2 dados: E= {(1,1),(1,2),(1,3),..,(2,1),(2,2),(2,3),...,(6,6)} *36 casos*

- Evento → subconjunto de E

  Arrojar 1 dado: Evento "sale par" → {2,4,6} *3 casos favorables (de los 6 posibles)*

  Arrojar 2 dados: Evento "la suma es 6" --> {(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)} *5 casos favorables (de los 36 posibles)*

PROBABILIDAD DE UN EVENTO (CÁLCULO ANALÍTICO)

Ejemplo

Se arroja 2 veces una moneda → E={CC, CS, SC, SS}

Si no está pesada: p(C)=1/2 y p(S)=1/2 (*equiprobabilidad*)

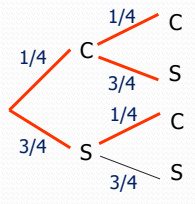
p(al menos 1 cara)= $\frac{\text{3 casos favorables}}{\text{4 casos totales}}$ = 3/4

si hay equiprobabilidad:

$$P(A) = \frac{Nro.casos\ en\ que\ ocurre\ A}{Nro.total\ de\ casos}$$

Si la moneda está pesada: p(C)=1/4 y p(S)=3/4

p(al menos 1 cara) = p(CC)+p(CS)+p(SC)
= p(C)*p(C) + p(C)*p(S) + p(S)*p(C)
= 1/4 * 1/4 + 1/4 * 3/4 + 3/4 * 1/4 = 7/16
→ independientes y disjuntos



PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

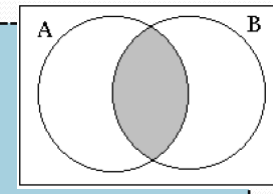
$E=\{A_1, A_2, A_3,\ldots,A_i,\ldots,A_N\}$

$0 \leq p(A_i) \leq 1$

$\sum_i p(A_i) = 1$

$p(A \cup B)= p(A)+p(B)-p(AB)$ *regla de la adición*

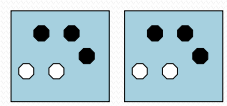
$p(AB)=p(A)*p(B/A)$ *p(AB) → probabilidad conjunta*
p(B/A) → probabilidad condicional



Nota:
- Si A y B son disjuntos o excluyentes entonces p(AB)=0
- Si son independientes: B no depende de A entonces p(B/A)=p(B)

Ejercicio del TP1

- Se tienen 5 sobres: 3 con temas fáciles (F) y 2 difíciles (D)
- Se sacan un sobre, se devuelve y se extrae otro (*con reposición*)
- E = {FF, FD, DF, DD}



1° 2°

Son independientes p(F/F)=p(F)
(*No importa que salió antes porque se repone el tema*)

Resolución analítica:

- p(F)=3/5 ; p(D)=2/5
- → Calcular la probabilidad que salgan 2 temas fáciles
- P(FF)=p(F)*p(F/F) = p(F)* p(F)=3/5*3/5

PROBABILIDAD DE UN EVENTO (POR MUESTREO)

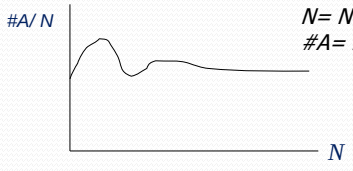
- En un experimento donde A es un evento, si el experimento se repite un número "grande" de veces, entonces la probabilidad frecuencial de A se aproxima al valor teórico de la probabilidad

Por ley de los grandes números

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{\#A}{N}$$

Se puede utilizar para cálculo por muestreo

N= Número de veces que repito el experimento
#A= Número de veces que ocurre A (caso favorable)



A medida que N crece → el cociente #A/N tiende a estabilizarse hasta alcanzar la convergencia y este es el valor de probabilidad p(A)

MUESTREO COMPUTACIONAL

Ejemplo

E={1,2,3,4,5,6} con p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=p(6)=1/6

→ Construir un "dado virtual"

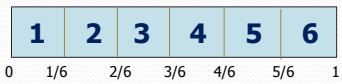
- generar un número aleatorio [0..1] mediante función *rand()*
- dividir el rango [0..1] para cada valor del dado (*en este caso hay equiprobabilidad*)

1	2	3	4	5	6

0 1/6 2/6 3/6 4/6 5/6 1

p=rand()
Si p ∈ [0..1/6) ⇒ salió 1
Si p ∈ [1/6..2/6) ⇒ salió 2
….etc

MUESTREO COMPUTACIONAL
Motor de Montecarlo



```
int Arrojardado ()
{ prob_acum={1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6, 1}
  p= rand () ;
  for (i=1 to 6)
     if (p <probacum[ i ])
          return i ;          //valor del dado
}
```

NOTA: Si no es una situación de equiprobabilidad como en este caso
→ modificar la distribución de prob. acumulada (prob_acum)

MUESTREO COMPUTACIONAL
Motor de Montecarlo

Se arrojan 2 dados (no pesados)
→ calcular la probabilidad de que la suma sea 6

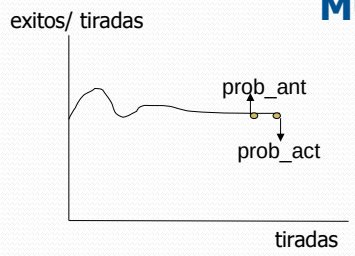
```
float CalcularProbA ()
{ exitos=0;   tiradas=0;  ....
  REPETIR EXPERIMENTO
  {  x=Arrojardado ();  y=Arrojardado ();
     if (x+y==6)
          exitos++;  //casos favorables
     tiradas++;
     prob = exitos / tiradas;
  }
  return prob;
}
```

¿cuantas veces se debería repetir el experimento?

debería ser suficientemente grande para asegurar que la probabilidad frecuencial se aproxime al valor analítico

→ Se requiere entonces determinar cuándo encontró el valor buscado

MUESTREO COMPUTACIONAL
Motor de Montecarlo



- Si en cada iteración se chequea la condición: |prob_ant - prob_act| < ξ el muestreo se puede detener cuando se verifica (**convergencia**) y entonces se habrá encontrado el valor buscado (aquí *prob(suma 6)*)

- Para evitar tener convergencia en las primeras tiradas, se puede fijar un mínimo de tiradas antes de empezar a verificar la convergencia
- Se puede agregar un máximo de tiradas (suficientemente grande!) para evitar que pueda ciclar infinitamente. Nota: No considerar sólo un límite máximo de tiradas, siempre se debe considerar el chequeo por convergencia.

MUESTREO COMPUTACIONAL
Motor de Montecarlo

Entonces:

```
float CalcularProbA ()
{ exitos=0; tiradas=0;
  prob_ant=-1; prob_act= 0;
  WHILE not converge(prob_ant,prob_act)(*)
  {
    x=Arrojardado();  y=Arrojardado();
    if (x+y==6)
          exitos++;
    tiradas++;
    prob_ant= prob_act;
    prob_act= exitos / tiradas;
  }
  return prob_act;
}
```

```
int Arrojardado ()
{ probacum={1/6,2/6,3/6,4/6,5/6,1}
  p=rand () ;
  for (i=1 to 6)
    if (p <probacum[ i ])
        return i;
}
```

```
BOOL converge(ant, act)
{ if ( |ant-act| )< ξ )    // ξ →cte pequeña
      return true;
 return false;
}
```

convergencia absoluta

o:

```
BOOL converge(ant, act)
{  if (|ant –act | / ant )< ξ
      return true;
 return false;
}
```

convergencia relativa

(*) se puede agregar condición de mínimo y máximo de tiradas

PROBABILIDADES CONDICIONALES

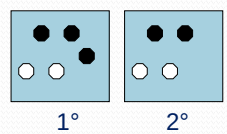
- En algunos casos la información aportada por un acontecimiento cambia las probabilidades de ocurrencia de otros
- En términos de probabilidades:

  La probabilidad de ocurrencia de un evento A depende de la ocurrencia de otro evento B → probabilidad condicional P(A/B)

  (ej: Caso sin reposición)

Ejercicio del TP1

- Se tienen 5 sobres: 3 con temas fáciles (F) y 2 difíciles (D)
- Se sacan dos sobres a la vez (*sin reposición*)
- E = {FF,FD,DF,DD}



No son independientes
(***Lo que salió antes afecta a lo que puede resultar después***)

Resolución analítica:

- → Calcular la probabilidad que salgan 2 temas fáciles
- P(FF)=p(F)*p(F/F)= 3/5*2/4

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD
CONJUNTA, CONDICIONAL Y MARGINAL

Probabilidad condicional | **Probabilidad Conjunta**

p(B/A)= p(AB)/p(A) ⇒ p(AB)= p(A)*p(B/A)

p(A/B)= p(AB)/p(B) ⇒ p(AB)=p(B)*p(A/B)

Luego:

P(AB)=p(A)*p(B/A)=p(B)*p(A/B)

Teorema de Bayes

Recordar que:

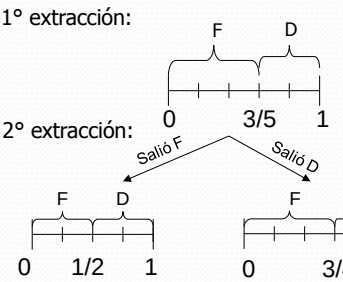
si p(B/A)=p(B) si son independientes → p(AB)=p(A)*p(B)

si p(A/B)=p(A) si son independientes → p(AB)=p(A)*p(B)

MUESTREO COMPUTACIONAL
Motor de Montecarlo

Caso sin reposición:

1° extracción:



Probabilidades condicionales

```
{ ....
      B1= PrimeraExtraccion ();
      B2= SegundaExtraccion (B1);
... }
```

```
int PrimeraExtraccion ()
{ probacum={3/5,1}
  x=rand ()
  for (i=0 to 1)
     if (x <probacum [i])
          return i
 }

int SegundaExtraccion (int B1)
{  matrizacum={1/2, 3/4}
                  { 1 , 1 }
   x=rand ()
   for (i=0 to 1)
      if (x <matrizacum[i][B1])
          return i
 }
```

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD
CONJUNTA, CONDICIONAL Y MARGINAL

Probabilidad Conjunta

P(AB)	A_1	A_2	A_i	…	A_n
B_1					
B_2					
B_j			$p(A_iB_j)$		
…					
B_m					

Prob. marginal

P(B)
$p(B_j)=\sum_k p(A_kB_j)$

P(A)			$p(A_i)=\sum_h p(A_iB_h)$		

Prob. marginal

Propiedades

$\sum_k p(A_k)=1$

$\sum_h p(B_h)=1$

$\sum_{k,h} p(A_kB_h)=1$

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD
CONJUNTA, CONDICIONAL Y MARGINAL

p(A/B)	A_1	A_2	A_i	…	A_n
B_1					
B_2					
B_j			$p(A_iB_j)/\ p(B_j)$		
…					
B_m					

Propiedad

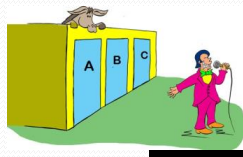
$\sum_k p(A_k/B_j)=1$

p(B/A)	A_1	A_2	A_i	…	A_n
B_1					
B_2					
B_j			$p(A_iB_j)/\ p(A_i)$		
…					
B_m					

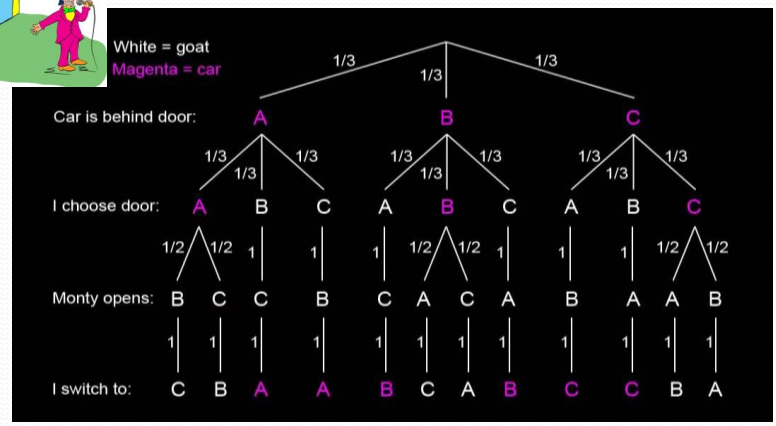
$\sum_h p(B_h/A_i)=1$

Importante: Dirección de las flechas para interpretar la tabla

THE MONTY HALL PROBLEM



Un posible planteo



¿conviene mantener la elección original? ¿o sería mejor escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?