TEORÍA DE LA INFORMACIÓN

Tratamiento probabilístico de la Información

Fuentes de información

continuación

INGENIERÍA DE SISTEMAS

Cursada 2016

FUENTES DE INFORMACIÓN

- Una fuente de información S genera en cada instante t un símbolo s_i elegido del conjunto de símbolos posibles, según su probabilidades de emisión (modelo)

Fuente de información → $s_1\ s_1\ s_2\ s_1\ s_3\ s_2 \ldots$

- Tipos de fuentes (según la relación entre sus símbolos):
  - Fuentes sin memoria *o de memoria nula* → se describen completamente mediante el conjunto de símbolos s_i y sus probabilidades de ocurrencia $p(s_i)$

    → cada símbolo aporta $I(s_i) = -\log_2 p(s_i)$ bits de información

    y su contenido medio de información o *Entropía* es: $H(S) = -\sum_i p(s_i)\log_2 p(s_i)\, bits$
  - Fuentes con memoria (*de orden 1, o markovianas*) → se describen mediante el conjunto de símbolos s_i y sus probabilidades de transición $p(s_j/s_i) = p_{j/i}$ (*grafo o matriz M*)
    - Vectores de estado: $V(t+1) = M \,.\, V(t)$, a partir de condición inicial V(0)
    - Vector o estado estacionario: $V^* = M \,.\, V^*$, independiente de condición inicial
    - Contenido medio de información o *Entropía* : $H_1(S) = \sum_i p_i * (-\sum_j p_{j/i} \log p_{j/i})$

TRANSICIÓN EN *n* PASOS

Para una fuente markoviana homogénea, si se emitió un símbolo s_j

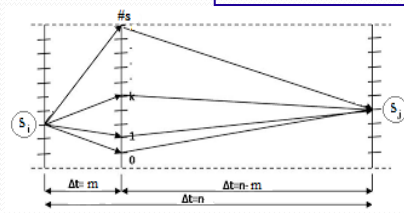
- la matriz de transición M contiene las probabilidades $p_{j/i}$ de emitir s_i en el instante siguiente
- la probabilidad de emitir s_j luego de *n* instantes es:

1º ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$p_{j/i}^{(n)} = \sum_k p_{k/i}^{(m)} \cdot p_{j/k}^{(n-m)}$$

para $m < n$

$$M^{(n)} = M^{(m)} \cdot M^{(n-m)}$$

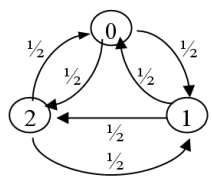


→ permite descomponer la probabilidad de transición de i a j en *n* pasos en la suma de probabilidades de las posibles trayectorias que van de i a j, pasando por cada posible estado *k* en un tiempo intermedio *m*

- Si $p_{j/i}^{(n)} > 0$ para algún $n > 0$ → se dice que s_j es accesible desde s_i

TRANSICIÓN EN *n* PASOS

Ejemplo



Probabilidad de pasar de 0 a 2 en 2 pasos:

$$p_{2/0}^{(2)} = p_{0/0} \cdot p_{2/0} + p_{1/0} \cdot p_{2/1} + p_{2/0} \cdot p_{2/2}$$

$$p_{2/0}^{(2)} = \cancel{0 \cdot 1/2} + 1/2 \cdot 1/2 + \cancel{1/2 \cdot 0} = 1/4$$

0	½	½		0	½	½			½	¼	¼
½	0	½	.	½	0	½		M^2=	¼	½	¼
½	½	0		½	½	0			¼	¼	½

Matriz de transición en 2 pasos

en 3 pasos:

½	¼	¼		0	½	½			¼	3/8	3/8
¼	½	¼	.	½	0	½		M^3=	3/8	¼	3/8
¼	¼	½		½	½	0			3/8	3/8	¼

M^2 . M

Matriz de transición en 3 pasos

PRIMERA TRANSICIÓN EN *n* PASOS

Cuál es la probabilidad de que se dé la transición de un símbolo s_i a un símbolo s_j por primera vez en *n* instantes? → $\mathbf{f_{j/}}^{\mathbf{i(n)}}$

n= 0: $\mathbf{f_{j/i}}^{(0)}=0$ n= 1: $p_{j/i}^{(1)} = \mathbf{f_{j/i}}^{(1)}$

n= 2: $p_{j/i}^{(2)} = \mathbf{f_{j/i}}^{(1)} \cdot p_{j/j}^{(1)} + \mathbf{f_{j/i}}^{(2)}$ → $\mathbf{f_{j/i}}^{(2)} = p_{j/i}^{(2)} - \mathbf{f_{j/i}}^{(1)}.p_{j/j}^{(1)}$

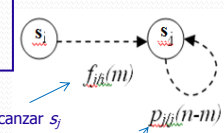
n= 3: $p_{j/i}^{(3)} = \mathbf{f_{j/i}}^{(1)} \cdot p_{j/j}^{(2)} + \mathbf{f_{j/i}}^{(2)} \cdot p_{j/j}^{(1)} + \mathbf{f_{j/i}}^{(3)}$

→ $\mathbf{f_{j/i}}^{(3)} = p_{j/i}^{(3)} - \mathbf{f_{j/i}}^{(1)}.p_{j/j}^{(2)} - \mathbf{f_{j/i}}^{(2)}.p_{j/j}^{(1)}$

En general:

$$f_{j/i}^{(n)} = p_{j/i}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-1} f_{j/i}^{(m)} \cdot p_{j/j}^{(n-m)}$$

2º ecuación de Chapman-Kolmogorov



probabilidad de alcanzar s_j por primera vez en *m* pasos

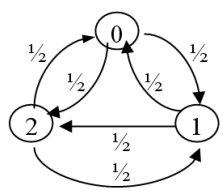
probabilidad de volver a s_j en *n-m* pasos

PRIMERA TRANSICIÓN EN *n* PASOS

Ejemplo

Cuál es la probabilidad de pasar de 0 a 2 por 1° vez en *n*= 1, 2, 3 pasos?

$$f_{j/i}^{(n)} = p_{j/i}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-1} f_{j/i}^{(m)} \cdot p_{j/j}^{(n-m)}$$



n= 0: $\mathbf{f_{2/0}}^{(0)} = \mathbf{0}$ *por definición*

n= 1: $\mathbf{f_{2/0}}^{(1)} = p_{2/0}^{(1)} = \mathbf{1/2}$

n= 2: $\mathbf{f_{2/0}}^{(2)} = p_{2/0}^{(2)} - f_{2/0}^{(1)} \cdot p_{2/2}^{(1)}$

$= ¼ - ½ \cdot 0 = \mathbf{1/4}$

n= 3: $\mathbf{f_{2/0}}^{(3)} = p_{2/0}^{(3)} - f_{2/0}^{(1)}. p_{2/2}^{(2)} - f_{2/0}^{(2)}. p_{2/2}^{(1)}$

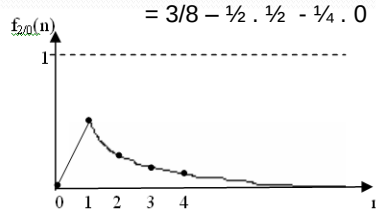
$= 3/8 - ½ . ½ - ¼ . 0 = \mathbf{1/8}$

Ya calculados:

$p_{2/0}^{(2)} = 1/4$

$p_{2/0}^{(3)} = 3/8$

$p_{2/2}^{(2)} = 1/2$



TRANSICIÓN EVENTUAL

A partir de las probabilidades de primera transición, se puede obtener la probabilidad de que eventualmente se produzca la transición de s_i a s_j durante la emisión de símbolos de la fuente:

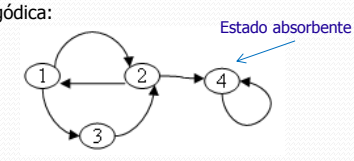
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{j/i}^{(n)} = F_{j/i}$$

- Si $F_{j/i} = 1$ → la transición de s_i a s_j se produce siempre
- Si $F_{j/i} < 1$ → existe la posibilidad de que no se produzca la transición de s_i a s_j

Ejemplo

Cuando la fuente no es ergódica: por ejemplo $F_{3/1} < 1$

(el proceso puede quedar absorbido en el estado 4)



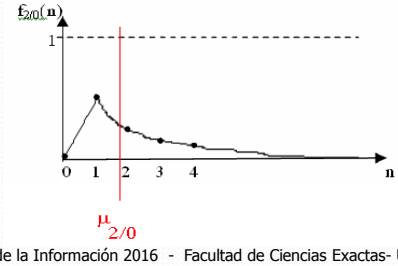
MEDIA DE PRIMERA TRANSICIÓN

Si $F_{j/i} = 1$, las probabilidades de primera transición $\{f_{j/i}(n)\}$ conforman una distribución de probabilidad de la variable "número de instantes para pasar de s_i a s_j por primera vez"

Entonces se puede calcular la media de la distribución:

$$\boxed{\mu_{j/i} = \sum_{n=1}^{\infty} n.f_{j/i}(n)}$$

→ tiempo medio de espera o cantidad de instantes hasta que se produzca la transición de s_i a s_j



RECURRENCIA EN *n* PASOS

En particular si i=j, $f_{ii}^{(n)}$ es la probabilidad de regresar por primera vez al mismo estado o símbolo de la fuente s_i

→ probabilidad de (1°) *recurrencia*:

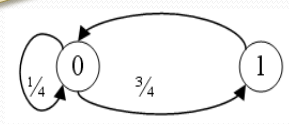
$$f_{i/i}^{(n)} = p_{i/i}^{(n)} - \sum_{m=1}^{n-1} f_{i/i}^{(m)} \cdot p_{i/i}^{(n-m)}$$

Si $F_{i/i}$ =1 (probabilidad de retorno eventual a s_i), la media de recurrencia es:

$$\mu_{i/i} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{i/i}^{(n)}$$

- Si $F_{i/i}$ =1 → s_i se denomina *recurrente*
- Si $F_{i/i}$ <1 → s_i se denomina *transitorio*

Ejemplo



n= 1: $\mathbf{f_{0/0}}^{(1)}$ = 1/4

n= 2: $\mathbf{f_{0/0}}^{(2)}$ = 3/4 . 1 = 3/4

n= 3: $\mathbf{f_{0/0}}^{(3)}$ = 0

$\mathbf{F_{0/0}}$ = ¼ + ¾ = 1

→ $\mu_{0/0}$= 1. ¼ + 2. ¾ + 0 = 7/4 = 1.75

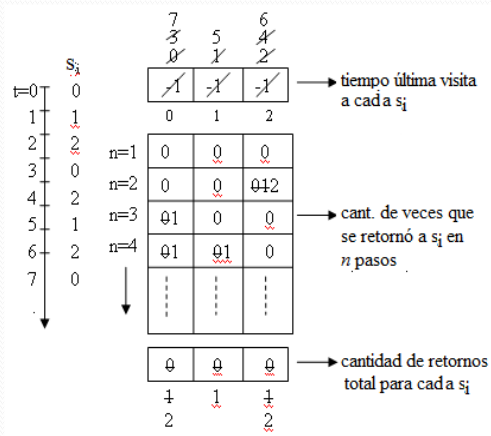
MUESTREO COMPUTACIONAL

para calcular $f_{i/i}^{(n)}$

- Se puede generar una única trayectoria (mensaje de la fuente) y detectar las transiciones entre sucesivas apariciones de s_i

- En cada iteración actualizar:
  - último instante en el que apareció s_i (para determinar *n*)
  - cant. retornos a cada s_i para cada *n* → ret(s_i,*n*)
  - y cantidad total de retornos a cada s_i → retTot(s_i)

- Calcular $f_{i/i}^{(n)}$= ret(s_i,*n*)/retTot(s_i)
- Verificar si $f_{i/i}^{(n)}$ converge



MUESTREO COMPUTACIONAL

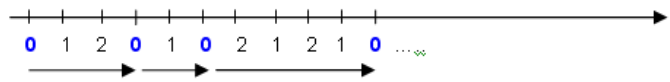
para calcular $\mu_{i/i}$

Procesar la cadena markoviana generada por muestreo, calculando el número de pasos entre los retornos al símbolo s_i :

- sumar la cantidad de pasos entre ocurrencias sucesivas del símbolo s_i
- dividir por la cantidad de retornos a s_i para obtener $\mu_{i/i}$
- verificar la convergencia de $\mu_{i/i}$

Ejemplo:

$\mu_{0/0}$



suma de #pasos de retorno a $0 = 3 + 2 + 5 + \ldots$

retornos a $0 = 1 \;\; 2 \;\; 3$

$$\mu_{0/0} = \frac{\text{suma de \#pasos de retorno a } 0}{\text{\# retornos a } 0}$$

BIBLIOGRAFÍA

Abramson N., Teoría de la Información y Codificación, Ed. Paraninfo, 1981

Cover T., Thomas J., Elements of Information Theory, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2006

Papoulis A., Probability Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 1991

Shannon C., Weaver W., Teoría Matemática de la Comunicación, Ed.Forja, 1981