MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA

ALEJANDRO GUILLERMO GONZÁLEZ

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Tandil · 2010

González, Alejandro Guillermo
Métodos matemáticos de la física. - 1a ed. - Tandil : Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2010.
357 p. ; 24x17 cm.

ISBN 978-950-658-240-1

1. Física. 2. Enseñanza Universitaria. I. Título
CDD 530.711

© 2010 - UNCPBA
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Secretaría Académica. Consejo Editorial
Pinto 399, 2° piso, Tandil (7000), Provincia de Buenos Aires
Tel./Fax: 02293 422000 int. 198
e-mail: c-editor@rec.unicen.edu.ar
web site: www.unicen.edu.ar

1ª edición: agosto de 2010

Diseño de Tapa
D. G. Pedro Tissier

Corrección
Lic. Rosalía Baltar

Coordinación Editorial
Mag. Andrea Díaz

Impreso por Docuprint S.A.
Tacuarí 123, Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Tirada: 50 ejemplares
Hecho el depósito que marca la Ley 11.723
ISBN 978-950-658-240-1

Contenidos generales

I. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y MÉTODOS GENERALES

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
2. PROBLEMA DE STURM–LIOUVILLE
3. SERIES DE FOURIER
4. FUNCIÓN DE GREEN
5. DISTRIBUCIONES
6. TRANSFORMADA DE LAPLACE
7. TRANSFORMADA DE FOURIER

II. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y MÉTODOS AVANZADOS

8. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
9. ECUACIONES DIFERENCIALES HIPERBÓLICAS
10. ECUACIONES DIFERENCIALES PARABÓLICAS
11. ECUACIONES DIFERENCIALES ELÍPTICAS
12. FUNCIONES ESPECIALES
13. DESARROLLOS ASINTÓTICOS
14. ECUACIONES INTEGRALES

Desocupado lector, sin juramento me podrás creer que quisiera que este libro, como hijo del entendimiento, fuera el más hermoso, el más gallardo y más discreto que pudiera imaginarse. Pero no he podido contravenir al orden de la naturaleza, que en ella cada cosa engendra su semejante.

El Quijote, Miguel de Cervantes

Scire ubi aliquid invenire possis,
ea demum maxima pars eruditionis est.

Adagio anónimo

Prefacio

Los prefacios suelen ser la parte de un libro que muchos omiten en una primera lectura, a pesar de ser aquella que el autor intencionalmente quiere que se lea antes que nada. No intento aburrir al lector con un largo prefacio, pero algunas palabras de advertencia resultan apropiadas aquí.

En primer lugar, este texto busca ayudar a los alumnos a estudiar una materia en la cual abundan textos de muy diferente valor y metodología. No pretendo ser exhaustivo aunque espero que estas notas sean útiles a los estudiantes que puedan sentirse apabullados por la vastedad de los temas considerados. He intentado buscar un camino intermedio entre dos tipos de textos usuales en la materia. Algunos textos corresponden a manuales de resolución de problemas centrados en procedimientos de cálculo pero con una base teórica más bien escueta sino francamente deficiente. Esto conlleva a que los alumnos hagan cálculos sin considerar las limitaciones de los métodos usados, ni atendiendo a las precauciones necesarias en su uso. Por otra parte existen excelentes textos matemáticos que ponen énfasis en la rigurosa demostración de la teoría involucrada en los métodos usuales de la Física, pero que son excesivamente extensos y en muchos casos inaccesibles por su complejidad a alumnos de grado en Física o Ingeniería. Este texto ha buscado evitar el primer peligro presentando la teoría en forma resumida pero accesible a los alumnos, y teniendo cuidado de señalar los peligros de un acercamiento puramente pragmático que no atienda a los fundamentos matemáticos de su correcto uso. Se atendió al segundo problema mediante la inclusión de numerosos ejemplos y problemas desarrollados en el texto, y reduciendo el número de teoremas y lemas a aquellos que se consideran necesarios para dar una idea de la teoría subyacente sin agobiar al lector con aspectos más técnicos y especializados.

La cita que precede este prefacio nos recuerda que lo más importante de la erudición es saber dónde encontrar lo que se necesita. En dicho sentido, este libro apunta a familiarizar a los alumnos con varios temas matemáticos usuales en la Física y darles las herramientas para profundizar en la literatura cuando lo requieran sus estudios y trabajos de investigación. Si se cumple este propósito, me sentiré satisfecho.

Este libro consta de dos partes y la materia *Métodos Matemáticos de la Física* que dicto en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires requiere el uso de ambas. La primera cubre tópicos básicos como ecuaciones diferenciales ordinarias, series de Fourier, función de Green, distribuciones y transformadas.

La segunda incluye temas más avanzados relacionados con ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones integrales y desarrollos asintóticos. Se puede decir que la primera parte busca introducir las herramientas necesarias para poder atacar los temas de la segunda parte.

Quiero agradecer al Dr. Héctor O. Di Rocco, mi predecesor en la cátedra, por facilitarme sus borradores de clase que me han sido útiles al elaborar algunas secciones de este texto. En la selección de los problemas que acompañan varios capítulos he contado con la apreciada colaboración del Lic. Mauricio Bidegain quien se encarga del dictado de las clases de trabajos prácticos de la materia.

Finalmente, agradezco de antemano la benevolencia del lector y su paciencia al seguir el desarrollo de este libro. Hay un cierto tramado de los temas que espero se haga evidente al lector a medida que avanza el texto. Toda obra es perfectible y esta no es una excepción. Es por eso, que cualquier comentario que me hagan llegar será bienvenido, ya que en el fondo todo autor desea dialogar con su lector y no meramente monologar.

Dr. Alejandro Guillermo González
Tandil, Abril 2009

Índice general

I. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y MÉTODOS GENERALES **1**

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS **3**

1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias: Generalidades 3
1.1.1. Clasificación 3
1.1.2. Condiciones de contorno e iniciales 5
1.1.3. Teoremas de existencia y unicidad 5
1.2. Funciones linealmente independientes: Wronskiano 7
1.3. Ecuaciones diferenciales no lineales: Casos particulares 8
1.3.1. Ecuaciones del tipo Bernoulli 8
1.3.2. Ecuaciones del tipo Riccati 9
1.4. Ecuaciones lineales ordinarias: Definiciones 9
1.4.1. Propiedades de las ecuaciones lineales homogéneas . . 10
1.4.2. Propiedades de las ecuaciones lineales inhomogéneas . 10
1.5. Ecuaciones lineales homogéneas: Soluciones y wronskiano . . 11
1.5.1. Fórmula de Abel 11
1.5.2. Cantidad de soluciones linealmente independientes . . 13
1.6. Ecuaciones lineales homogéneas: Método del descenso 14
1.7. Ecuaciones lineales inhomogéneas: Método de variación de parámetros 15
1.8. Problemas bien planteados 16
1.9. Puntos ordinarios 18
1.10. Puntos singulares: Clasificación 20
1.11. Método de Frobenius 21
1.11.1. Introducción 21
1.11.2. Formulación general 23
1.11.3. Clasificación de los problemas 24
1.12. Ecuación hipergeométrica 28
1.13. Desarrollos en el infinito 29
1.14. Puntos singulares irregulares 29
1.15. Problemas 30

2. PROBLEMA DE STURM–LIOUVILLE **35**

2.1. Análisis funcional 35

2.1.1. Norma: Espacios de Banach 36
2.1.2. Producto interno entre funciones 40
2.1.3. Ortonormalidad entre funciones 42
2.2. Desigualdad de Bessel 43
2.3. Coeficientes de Fourier generalizados 45
2.4. Propiedades de las soluciones de ecuaciones lineales ordinarias 47
2.4.1. Teorema de separación de Sturm 47
2.4.2. Forma normal de una ecuación diferencial 47
2.4.3. Teorema de las oscilaciones en intervalos infinitos . . . 48
2.4.4. Teorema de las oscilaciones en intervalos finitos 48
2.4.5. Teorema de comparación de Sturm 49
2.5. Operadores adjuntos 49
2.5.1. Sistemas adjuntos 49
2.5.2. Fórmulas de Lagrange y Green 51
2.5.3. Operadores autoadjuntos 51
2.5.4. Problema de autovalores 54
2.6. Problema de Sturm–Liouville regular 54
2.6.1. Propiedades del problema de Sturm–Liouville regular 56
2.6.2. Representación polar de las soluciones 58
2.6.3. Teoremas fundamentales del problema regular 60
2.7. Problema de Sturm–Liouville singular 64
2.7.1. Casos particulares de problemas singulares 65
2.8. Problemas 67

3. SERIES DE FOURIER 69
3.1. Introducción 69
3.2. Clasificación de las discontinuidades de las funciones. 70
3.3. Series formadas por funciones de una variable 71
3.3.1. Series trigonométricas 71
3.3.2. Convergencia uniforme 72
3.3.3. Propiedades de series uniformemente convergentes . . 72
3.4. Serie de Fourier: Definición 73
3.5. Convergencia de series de Fourier 74
3.5.1. Teorema de Dirichlet 74
3.5.2. Integrales de Dirichlet 75
3.5.3. Demostración del teorema de Dirichlet 77
3.6. Integración y derivación de series de Fourier 78
3.7. Fenómeno de Gibbs. 79
3.8. Desarrollos de funciones pares e impares 80
3.9. Forma compleja de la serie de Fourier 82
3.10. Aplicaciones de las series de Fourier 82
3.11. Problemas 84

4. FUNCIÓN DE GREEN 87
4.1. Introducción 87

4.1.1. Caso testigo: Oscilaciones forzadas 87
4.1.2. Propiedades de la función de Green 89
4.1.3. Caso testigo: Deducción de la función de Green a partir de sus propiedades. 90
4.2. Funciones de Green para ED de segundo orden 91
4.3. Problemas inhomogéneos y homogéneos asociados 92
4.4. Existencia de la función de Green 94
4.4.1. Caso con condiciones de contorno homogéneas puras . 94
4.4.2. Caso con condiciones de contorno inhomogéneas puras 96
4.5. Problema de Sturm–Liouville inhomogéneo 96
4.5.1. Teorema de existencia 97
4.5.2. Función de Green generalizada 98
4.6. Problema integral equivalente 99
4.7. Problemas 101

5. DISTRIBUCIONES 103
5.1. Funciones y funcionales 103
5.2. Distribuciones 104
5.3. Funciones generalizadas: Delta de Dirac 108
5.4. Propiedades de convergencia 110
5.5. Derivada de una distribución 112
5.6. Relación entre la delta de Dirac y la función escalón 113
5.7. Desarrollo formal de la delta de Dirac en serie de Fourier . . 115
5.8. Ecuaciones diferenciales con distribuciones 115
5.9. Relación de clausura entre autofunciones 117
5.10. Productos de distribuciones 119
5.10.1. Producto directo de distribuciones 120
5.10.2. Producto de convolución entre distribuciones 120
5.11. Problemas 122

6. TRANSFORMADA DE LAPLACE 127
6.1. Introducción: Transformadas integrales 127
6.2. Transformada de Laplace: Abscisa de convergencia 128
6.3. Propiedades de la transformada de Laplace 129
6.3.1. Linealidad 129
6.3.2. Primera propiedad de traslación 129
6.3.3. Segunda propiedad de traslación 129
6.3.4. Propiedad del cambio de escala 130
6.3.5. Otras propiedades de interés 130
6.3.6. Transformada de Laplace de las derivadas 130
6.3.7. Transformada de Laplace de integrales 131
6.3.8. Delta de Dirac 131
6.4. Transformada inversa de Laplace 132
6.4.1. Definición y unicidad: Teorema de Lerch 132
6.4.2. Caso con polos 133

6.5. Convolución 134
6.6. Aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales 136
6.6.1. Ecuaciones ordinarias con coeficientes variables 136
6.6.2. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales 137
6.7. Problemas 139

7. TRANSFORMADA DE FOURIER 143
7.1. Introducción: Acercamiento heurístico 143
7.2. Teorema de la integral de Fourier: Fórmulas de inversión . . 145
7.3. Transformada de Fourier y su inversa 146
7.4. Propiedades de la transformada de Fourier 148
7.4.1. Linealidad y escala 148
7.4.2. Propiedad de la derivada 148
7.4.3. Propiedades de paridad 149
7.4.4. Propiedades de atenuación y de corrimiento 149
7.5. Teoremas de Parseval 150
7.6. Convolución 151
7.7. Transformadas de distribuciones 152
7.7.1. Distribuciones de crecimiento lento 152
7.7.2. Transformadas de distribuciones usuales 153
7.7.3. Relación de clausura 154
7.8. Transformada de Fourier en varias variables 155
7.9. Relación con la transformada de Laplace 156
7.10. Conclusiones 156
7.11. Problemas 157

II. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y MÉTODOS AVANZADOS 161

8. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES 163
8.1. Introducción 163
8.1.1. Clasificación 164
8.1.2. Características generales de una solución 165
8.2. Ecuaciones de primer orden: Onda simple 167
8.2.1. Ecuación con coeficientes constantes 167
8.2.2. Ecuación lineal con coeficientes variables 168
8.3. Problema de Hadamard 169
8.4. Ecuaciones de primer orden casi–lineales 169
8.4.1. Caso homogéneo 169
8.4.2. Caso general 171
8.5. Ecuaciones de segundo orden semilineales en dos variables . . 173
8.5.1. Formas canónicas 173
8.5.2. Ecuaciones Hiperbólicas 174
8.5.3. Ecuaciones Parabólicas 176

8.5.4. Ecuaciones Elípticas 177
8.6. Ecuaciones semilineales en muchas variables 178
8.7. Transformadas integrales 180
8.8. Función de Green en varias variables 182
8.8.1. Ecuaciones inhomogéneas y condiciones de contorno homogéneas 182
8.8.2. Ecuaciones homogéneas y condiciones de contorno inhomogéneas 183
8.9. Método de separación de variables 184
8.9.1. Esquema general de separación 184
8.9.2. Separación de variables en dos coordenadas 185
8.9.3. Ejemplo: Vibraciones de una viga elástica 187
8.10. Conclusiones 188

9. ECUACIONES DIFERENCIALES HIPERBÓLICAS 191
9.1. Introducción 191
9.2. Método de las características 193
9.2.1. Fórmula de D' Alembert 193
9.2.2. Estabilidad de las soluciones 195
9.2.3. Propagación libre de ondas en el espacio 195
9.3. Método de separación de las variables 196
9.3.1. Problema homogéneo: Vibraciones naturales bidimensionales 197
9.3.2. Problema inhomogéneo: Vibraciones forzadas unidimensionales 199
9.4. Función de Green 201
9.4.1. Ecuaciones de Maxwell 201
9.4.2. Potenciales retardados 202
9.4.3. Identidades de Green 203
9.4.4. Fórmula de Kirchoff 204
9.5. Conclusiones 205
9.6. Problemas 205

10. ECUACIONES DIFERENCIALES PARABÓLICAS 209
10.1. Introducción 209
10.1.1. Problemas bien planteados 210
10.1.2. Estabilidad: Problema Inverso 212
10.2. Relación de Duhamel 213
10.3. Separación en variables 214
10.3.1. Problema de Cauchy sin fuentes y con periodicidad . 214
10.3.2. Problema de Cauchy sin fuentes y con contornos . . . 216
10.3.3. Problema de Cauchy con fuentes y con contornos . . . 217
10.4. Transformadas integrales: Problema de Cauchy 219
10.5. Función de Green en espacio ilimitado 220
10.5.1. Problema sin fuentes y con condiciones iniciales 220

10.5.2. Problema con fuentes y condiciones iniciales 221
10.6. Estado de régimen: Onda térmica 222
10.7. Conclusiones 223
10.8. Problemas 224

11. ECUACIONES DIFERENCIALES ELÍPTICAS 229
11.1. Introducción 229
11.2. Soluciones particulares de la ecuación de Laplace 230
11.3. Teoría del potencial: Multipolos 231
11.4. Representación integral 233
11.4.1. Fórmula de Green 233
11.4.2. Aplicaciones en Electrostática 235
11.4.3. Corolarios para las funciones armónicas 236
11.5. Función de Green 237
11.6. Problema de Dirichlet para una esfera 238
11.7. Integral de Poisson para esfera 240
11.8. Problema de Dirichlet para un círculo 241
11.9. Ecuación biarmónica 243
11.10. Problemas bidimensionales y transformación conforme 244
11.11. Conclusiones 246
11.12. Problemas 247

12. FUNCIONES ESPECIALES 249
12.1. Introducción 249
12.2. Funciones eulerianas 250
12.2.1. Función Gamma 250
12.2.2. Fórmula de Hankel 251
12.2.3. Fórmula de Weierstrass 253
12.2.4. Función Beta 255
12.3. Funciones usuales con representación integral 256
12.4. Polinomios de Legendre 259
12.4.1. Función generatriz 259
12.4.2. Relaciones de recurrencia 260
12.4.3. Problema de Sturm–Liouville 261
12.4.4. Funciones adjuntas de Legendre 261
12.4.5. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas 262
12.5. Polinomios de Hermite 263
12.6. Polinomios de Laguerre 265
12.6.1. Propiedades generales 265
12.6.2. Polinomios de Laguerre generalizados 267
12.6.3. Ecuación de Schrödinger del átomo de hidrógeno . . . 268
12.7. Funciones de Bessel 269
12.7.1. Ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas . . 269
12.7.2. Problemas de Sturm–Liouville 270
12.7.3. Obtención por el método de Frobenius 272

12.7.4. Función generatriz y representaciones integrales . . . 275
12.7.5. Series de Fourier–Bessel 276
12.7.6. Integral de Fourier–Bessel 276
12.7.7. Funciones de Bessel modificadas 277
12.7.8. Propiedades de recurrencia 278
12.7.9. Funciones de Bessel de orden fraccionario 279
12.8. Función hipergeométrica 280
12.9. Ecuación hipergeométrica confluente y serie asociada 281
12.10. Problemas 282

13. DESARROLLOS ASINTÓTICOS 285
13.1. Introducción 285
13.2. Relaciones asintóticas 286
13.2.1. Operaciones con relaciones asintóticas 288
13.3. Expansión asintótica de funciones integrales 288
13.4. Método de la fase estacionaria 291
13.5. Comportamiento del orden dominante de las ecuaciones diferenciales 295
13.6. Ecuaciones diferenciales: empalme de soluciones asintóticas . 298
13.7. Conclusiones 301
13.8. Problemas 301

14. ECUACIONES INTEGRALES 303
14.1. Integrales de Volterra 303
14.1.1. Clasificación 303
14.1.2. Relación con ecuaciones diferenciales 304
14.1.3. Convolución 305
14.2. Resolventes 306
14.3. Resolución por transformadas de Laplace 307
14.4. Integrales de Fredholm 309
14.5. Alternativa de Fredholm 310
14.6. Conclusiones 311

A. SERIES Y CONVERGENCIA 315
A.1. Convergencia de series infinitas 315
A.1.1. Convergencia de una sucesión 315
A.1.2. Criterio de convergencia de Cauchy 315
A.1.3. Convergencia de series 316
A.1.4. Convergencia absoluta 316
A.2. Series especiales 317
A.2.1. Serie geométrica 317
A.2.2. Serie armónica. 317
A.3. Criterios de convergencia 318
A.3.1. El criterio de comparación 318
A.3.2. El primer criterio del cociente 318

A.3.3. El criterio integral 319
A.3.4. El criterio para series alternas 320
A.3.5. El segundo criterio del cociente 320
A.3.6. El criterio de la raíz 320

B. TABLAS DE TRANSFORMADAS **321**
B.1. Transformadas de Laplace usuales 321
B.2. Transformadas de Fourier usuales 322

Bibliografía **325**

Índice alfabético **329**