Métodos Matemáticos de la Física: Método de Frobenius

DCFyA − FCEx − UNCPBA

Operador L

$$\text{Simplify}\left[\sum_{i=0}^{5} z^i\, P_i[z]\, D\left[z^{\rho+j}, \{z, i\}\right]\right]$$

$$z^{j+\rho}\left(P_0[z] + (j+\rho)\, P_1[z] + (-1+j+\rho)\,(j+\rho)\, P_2[z] + (-2+j+\rho)\,(-1+j+\rho)\,(j+\rho)\, P_3[z] + (-3+j+\rho)\,(-2+j+\rho)\,(-1+j+\rho)\,(j+\rho)\, P_4[z] + (-4+j+\rho)\,(-3+j+\rho)\,(-2+j+\rho)\,(-1+j+\rho)\,(j+\rho)\, P_5[z]\right)$$

$$z^i\, D\left[z^{j+\rho}, \{z, i\}\right] \;/.\; i \to 3$$

$$z^{j+\rho}\,(-2+j+\rho)\,(-1+j+\rho)\,(j+\rho)$$

Desarrollo analítico

$$f[z_, u_] := \text{Sum}\left[f_k[u]\, z^k, \{k, 0, \infty\}\right]$$

$$sa = \text{Sum}\left[c_j\, z^{j+\rho}\, f[z, j+\rho], \{j, 0, \infty\}\right]$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^{j+\rho}\, c_j \sum_{k=0}^{\infty} z^k\, f_k[j+\rho]$$

$$sb = \text{Sum}\left[z^{j+\rho}\, \text{Sum}[c_s\, f_{j-s}[s+\rho], \{s, 0, j\}], \{j, 0, \infty\}\right]$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^{j+\rho} \sum_{s=0}^{j} c_s\, f_{j-s}[s+\rho]$$

$$((sa \;/.\; j \to j-k) \;/.\; k \to j-s) - sb$$

$$\sum_{j-(j-s)=0}^{\infty} z^{s+\rho}\, c_s \sum_{j-s=0}^{\infty} z^{j-s}\, f_{j-s}[s+\rho] - \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+\rho} \sum_{s=0}^{j} c_s\, f_{j-s}[s+\rho]$$

Coeficientes

$$\text{coef}[j_] := \sum_{s=0}^{j} c_s\, f_{j-s}[s+\rho] == 0$$

```
TableForm[Map[coef, Table[j, {j, 1, 5}]]]
```

$c_1\, f_0[1+\rho] + c_0\, f_1[\rho] == 0$

$c_2\, f_0[2+\rho] + c_1\, f_1[1+\rho] + c_0\, f_2[\rho] == 0$

$c_3\, f_0[3+\rho] + c_2\, f_1[2+\rho] + c_1\, f_2[1+\rho] + c_0\, f_3[\rho] == 0$

$c_4\, f_0[4+\rho] + c_3\, f_1[3+\rho] + c_2\, f_2[2+\rho] + c_1\, f_3[1+\rho] + c_0\, f_4[\rho] == 0$

$c_5\, f_0[5+\rho] + c_4\, f_1[4+\rho] + c_3\, f_2[3+\rho] + c_2\, f_3[2+\rho] + c_1\, f_4[1+\rho] + c_0\, f_5[\rho] == 0$

```
c5 /. Simplify[Solve[%, c5, {c1, c2, c3, c4}]]
```

$$\{(c_0\,(f_1[\rho]\,(f_1[1+\rho]\,(f_1[2+\rho]\,(-f_1[3+\rho]\,f_1[4+\rho] + f_0[4+\rho]\,f_2[3+\rho]) + f_0[3+\rho]\,(f_1[4+\rho]\,f_2[2+\rho] - f_0[4+\rho]\,f_3[2+\rho])) + f_0[2+\rho]\,(f_1[3+\rho]\,f_1[4+\rho]\,f_2[1+\rho] - f_0[3+\rho]\,f_1[4+\rho]\,f_3[1+\rho] + f_0[4+\rho]\,(-f_2[1+\rho]\,f_2[3+\rho] + f_0[3+\rho]\,f_4[1+\rho]))) + f_0[1+\rho]\,(f_1[2+\rho]\,f_2[\rho]\,(f_1[3+\rho]\,f_1[4+\rho] - f_0[4+\rho]\,f_2[3+\rho]) + f_0[2+\rho]\,(-f_1[3+\rho]\,f_1[4+\rho] + f_0[4+\rho]\,f_2[3+\rho])\,f_3[\rho] + f_0[3+\rho]\,(f_1[4+\rho]\,(-f_2[\rho]\,f_2[2+\rho] + f_0[2+\rho]\,f_4[\rho]) + f_0[4+\rho]\,(f_2[\rho]\,f_3[2+\rho] - f_0[2+\rho]\,f_5[\rho])))))\,/\,(f_0[1+\rho]\,f_0[2+\rho]\,f_0[3+\rho]\,f_0[4+\rho]\,f_0[5+\rho])\}$$

Formas Matriciales

$$d[j_] := \sum_{s=0}^{j} c_s\, f_{j-s}[s+\rho]$$

```
n = 5;
Matriz = SparseArray[{i_, j_} /; i >= j → f_{i-j}[ρ + j - 1], {n + 1, n + 1}];
Matriz // MatrixForm
Map[d, Table[j, {j, 0, n}]] == Matriz.Table[c_s, {s, 0, n}]
```

$$\begin{pmatrix} f_0[\rho] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1[\rho] & f_0[1+\rho] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2[\rho] & f_1[1+\rho] & f_0[2+\rho] & 0 & 0 & 0 \\ f_3[\rho] & f_2[1+\rho] & f_1[2+\rho] & f_0[3+\rho] & 0 & 0 \\ f_4[\rho] & f_3[1+\rho] & f_2[2+\rho] & f_1[3+\rho] & f_0[4+\rho] & 0 \\ f_5[\rho] & f_4[1+\rho] & f_3[2+\rho] & f_2[3+\rho] & f_1[4+\rho] & f_0[5+\rho] \end{pmatrix}$$

True

Formas Matriciales II

```
MF = Transpose[Drop[Transpose[Drop[Matriz, 1]], -1]];
MF // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} f_1[\rho] & f_0[1+\rho] & 0 & 0 & 0 \\ f_2[\rho] & f_1[1+\rho] & f_0[2+\rho] & 0 & 0 \\ f_3[\rho] & f_2[1+\rho] & f_1[2+\rho] & f_0[3+\rho] & 0 \\ f_4[\rho] & f_3[1+\rho] & f_2[2+\rho] & f_1[3+\rho] & f_0[4+\rho] \\ f_5[\rho] & f_4[1+\rho] & f_3[2+\rho] & f_2[3+\rho] & f_1[4+\rho] \end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[Reverse[MF]]
```

$$\begin{pmatrix} f_5[\rho] & f_4[1+\rho] & f_3[2+\rho] & f_2[3+\rho] & f_1[4+\rho] \\ f_4[\rho] & f_3[1+\rho] & f_2[2+\rho] & f_1[3+\rho] & f_0[4+\rho] \\ f_3[\rho] & f_2[1+\rho] & f_1[2+\rho] & f_0[3+\rho] & 0 \\ f_2[\rho] & f_1[1+\rho] & f_0[2+\rho] & 0 & 0 \\ f_1[\rho] & f_0[1+\rho] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(-1)^2 Det[Reverse[MF]] - Det[MF]
```

0

Forma Alternativa

```
m[i_, j_] := f_{i-j}[ρ + j - 1] /; i ≥ j
m[i_, j_] := 0 /; i < j

n = 7;
Matriz = Array[m, {n + 1, n + 1}];
MatrixForm[Matriz]
Map[d, Table[j, {j, 0, n}]] == Matriz.Table[c_s, {s, 0, n}]
```

$$\begin{pmatrix} f_0[\rho] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1[\rho] & f_0[1+\rho] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2[\rho] & f_1[1+\rho] & f_0[2+\rho] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_3[\rho] & f_2[1+\rho] & f_1[2+\rho] & f_0[3+\rho] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_4[\rho] & f_3[1+\rho] & f_2[2+\rho] & f_1[3+\rho] & f_0[4+\rho] & 0 & 0 & 0 \\ f_5[\rho] & f_4[1+\rho] & f_3[2+\rho] & f_2[3+\rho] & f_1[4+\rho] & f_0[5+\rho] & 0 & 0 \\ f_6[\rho] & f_5[1+\rho] & f_4[2+\rho] & f_3[3+\rho] & f_2[4+\rho] & f_1[5+\rho] & f_0[6+\rho] & 0 \\ f_7[\rho] & f_6[1+\rho] & f_5[2+\rho] & f_4[3+\rho] & f_3[4+\rho] & f_2[5+\rho] & f_1[6+\rho] & f_0[7+\rho] \end{pmatrix}$$

True