Movimiento Circular (resumen)

MOVIMIENTO CIRCULAR

Retomemos un ejemplo que vimos cuando estudiamos cinemática…

Ejemplo. Una partícula se mueve en 2-D siguiendo una trayectoria dada por la ecuación:

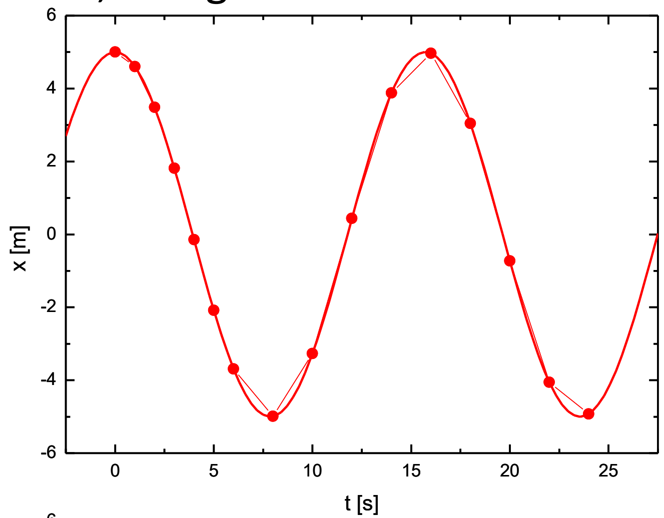
$$\vec{r}(t) = 5m \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} + 5m \cdot \mathrm{sen}(0.4s^{-1}t)\breve{\jmath}$$

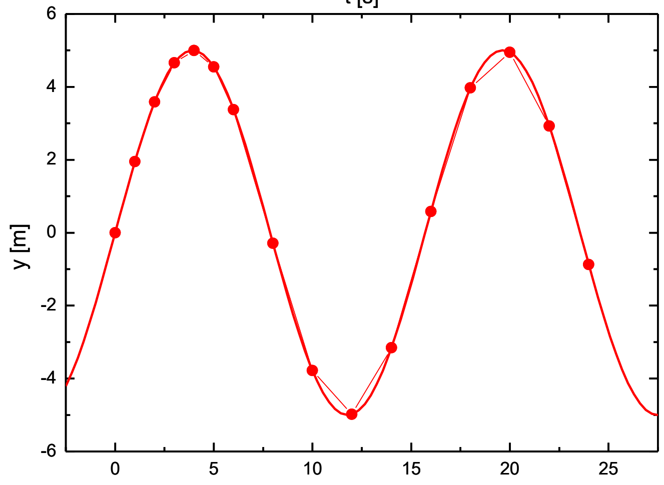
(a) Graficar $x(t)$, $y(t)$, y la trayectoria en el plano xy

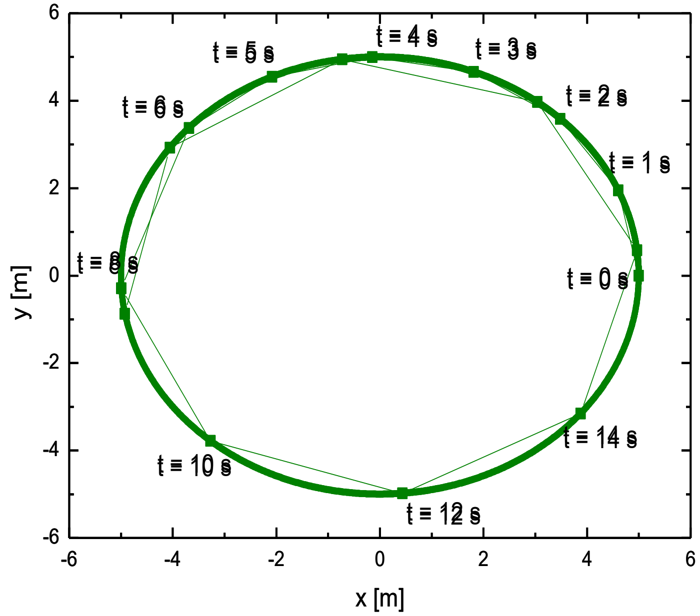
NOTA: A menos que se indique lo contrario, el argumento de las funciones trigonométricas está en *radianes*

Rta: Hagamos una Tabla

t [s]	x [m]	y [m]
0	5	0
1	4.6053	1.9471
2	3.4835	3.58678
3	1.8118	4.6602
4	-0.146	4.99787
5	-2.0807	4.54649
6	-3.687	3.37732







Trayectoria circular !

Ejercicio. Calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para los instantes iniciales y graficar sobre la trayectoria (Respuesta en las sigs. diapositivas)

Ejercicio (continuación). Una partícula se mueve en 2-D siguiendo una trayectoria dada por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = 5m \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} + 5m \cdot \operatorname{sen}(0.4s^{-1}t)\breve{\jmath}$$

Calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para los instantes iniciales y graficar sobre la trayectoria.

Rta: Derivando:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\frac{m}{s} \cdot \operatorname{sen}(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} + 2\frac{m}{s} \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\jmath}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -0.8\frac{m}{s^2} \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} - 0.8\frac{m}{s^2} \cdot \operatorname{sen}(0.4s^{-1}t)\,\breve{\jmath}$$

Calculando para distintos instantes:

t [s]	v_x [m/s]	v_y [m/s]	a_x [m/s²]	a_y [m/s²]
0	0.000	2.000	-0.800	0.000
2	-1.435	1.393	-0.557	-0.574
4	-1.999	-0.058	0.023	-0.799
6	-1.351	-1.475	0.590	-0.540
8	0.117	-1.997	-0.799	-0.047
10	1.514	-1.307	0.523	0.605

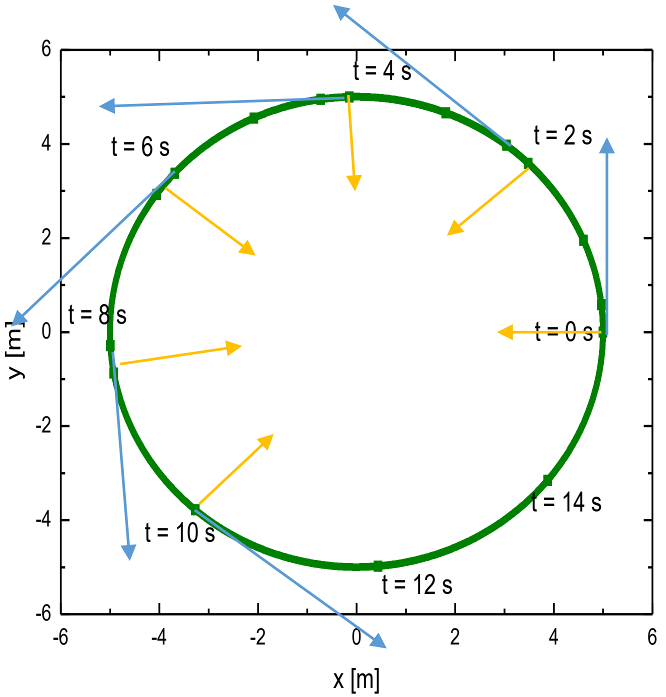
(sigue…)

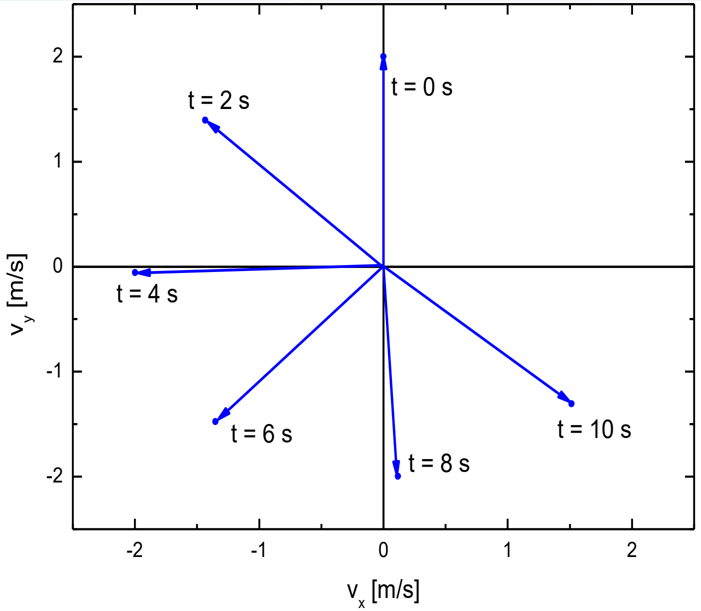
Ejercicio (continuación). Una partícula se mueve en 2-D siguiendo una trayectoria dada por la ecuación:

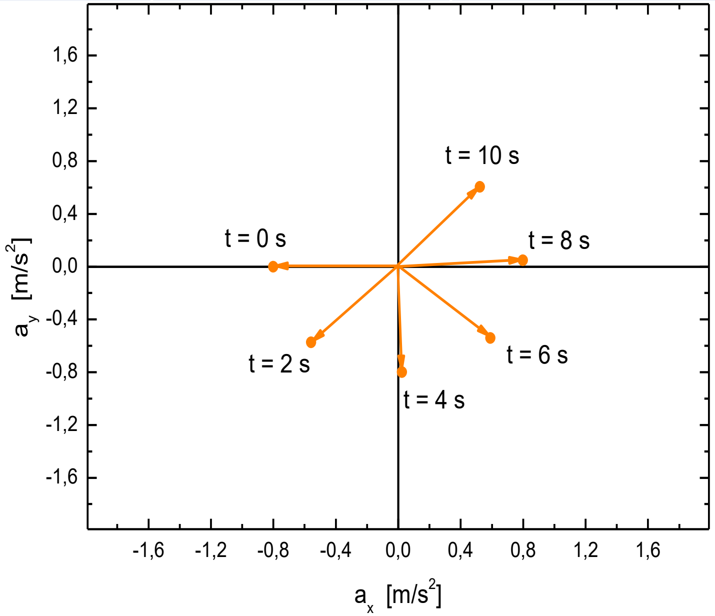
$$\vec{r}(t) = 5m \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} + 5m \cdot \mathrm{sen}(0.4s^{-1}t)\breve{\jmath}$$

Calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para los instantes iniciales y graficar sobre la trayectoria.

t [s]	*v_x [m/s]*	*v_y [m/s]*	*a_x [m/s²]*	*a_y [m/s²]*
0	0.000	2.000	-0.800	0.000
2	-1.435	1.393	-0.557	-0.574
4	-1.999	-0.058	0.023	-0.799
6	-1.351	-1.475	0.590	-0.540
8	0.117	-1.997	-0.799	-0.047
10	1.514	-1.307	0.523	0.605



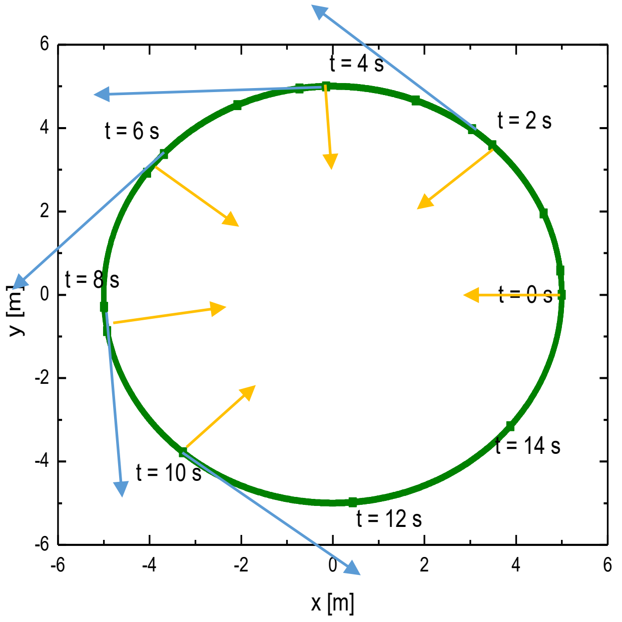




Conclusiones del ejemplo anterior

En un movimiento circular el *módulo* de la velocidad puede (o no) permanecer constante. Pero la *dirección* de la velocidad necesariamente cambia (de lo contrario, el cuerpo se movería en línea recta).

Pero si la *dirección* de la velocidad cambia, es porque hay una aceleración (incluso aunque el módulo de la velocidad permanezca constante). Recordar que $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (es vectorial)



En todo movimiento circular hay, al menos, una aceleración, la cuál está dirigida en forma radial hacia el centro de la circunferencia. Esta aceleración se denomina aceleración centrípeta $\vec{a}_C$, y su módulo está dado por:

$$\boxed{a_C = \frac{v^2}{R}}$$

Aceleración centrípeta

donde v es la velocidad tangencial en el punto, y R el radio de giro.

Aceleración Centrípeta

Ejercicio: A partir de los datos del ejercicio anterior, verificar que se cumple la relación entre la aceleración centrípeta y la velocidad dada por la fórmula anterior.

Rta: Ya teníamos calculadas las componentes de $\vec{v}$ y de $\vec{a}$ en diferentes instantes. Calculemos los módulos:

t [s]	*v_x [m/s]*	*v_y [m/s]*	*a_x [m/s²]*	*a_y [m/s²]*	*|v| [m/s]*	*|a| [m/s²]*
0	0.000	2.000	-0.800	0.000	2.000	0.800
2	-1.435	1.393	-0.557	-0.574	2.000	0.800
4	-1.999	-0.058	0.023	-0.799	2.000	0.800
6	-1.351	-1.475	0.590	-0.540	2.000	0.800
8	0.117	-1.997	-0.799	-0.047	2.000	0.800
10	1.514	-1.307	0.523	0.605	2.000	0.800

Por otro lado, de los datos del problema podemos observar que el radio de giro es… $R = 5m$

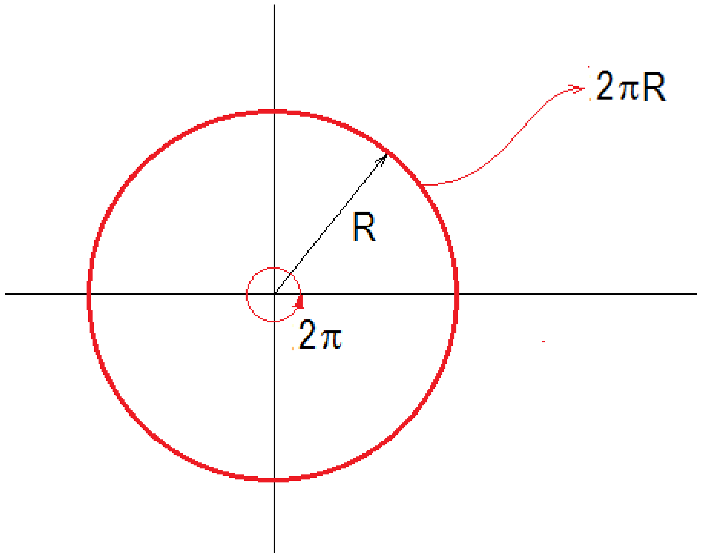
En cualquier momento que calcule obtengo

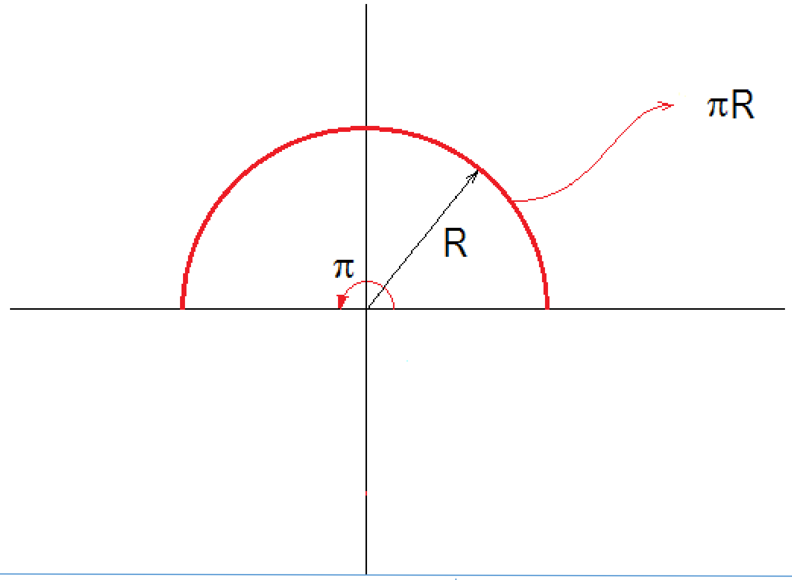
$$a_C = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\ m/s)^2}{5\ m} = \frac{4\ {m^2}/{s^2}}{5\ m} = 0.8\ m/s^2$$

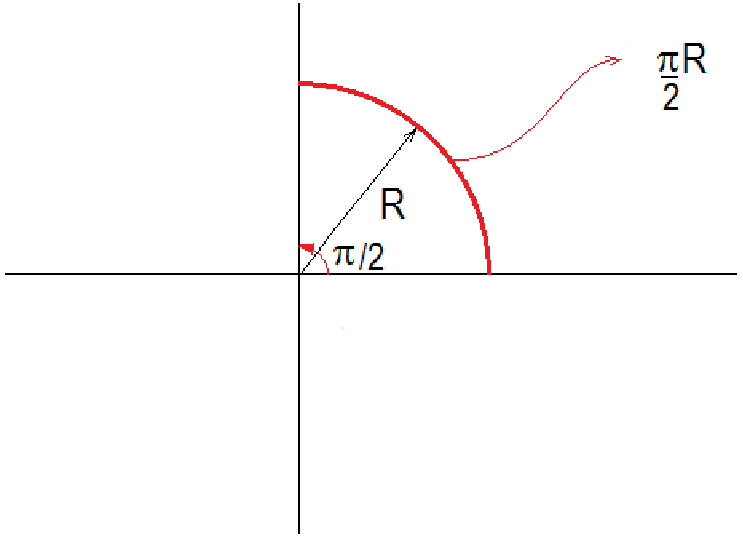
…que coincide con el módulo de la aceleración total calculado en la última columna de la tabla.

Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Antes de empezar: Recordemos esto







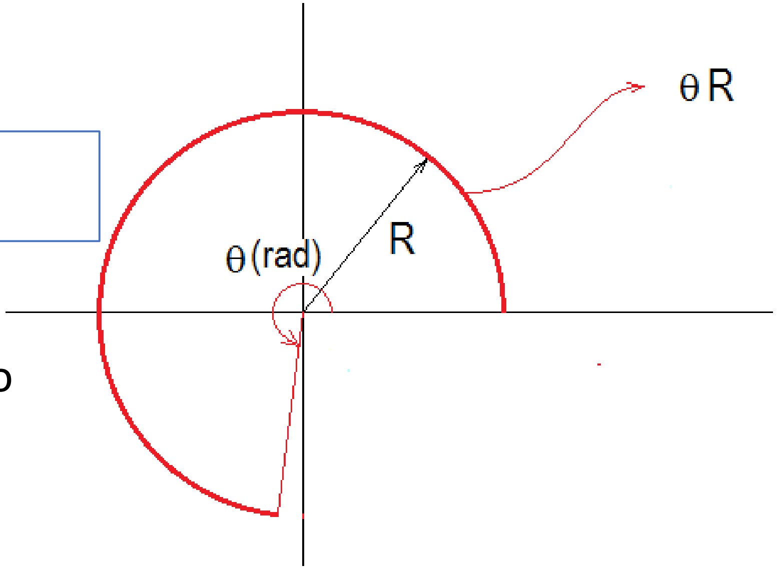
Y, en general…

$$\boxed{s = \theta R}$$

arco

ángulo
(en radianes)

radio



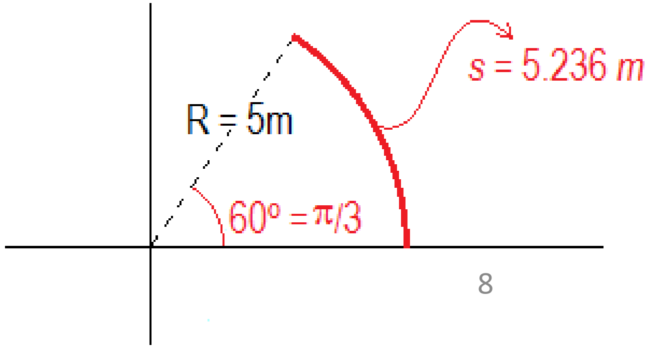
Ejemplo: Hallar la longitud del arco subtendido por un ángulo de 60º sobre una circunferencia de 5 m de radio

Rta: Primero paso el ángulo a radianes (regla de tres simple):

$$60º \equiv \pi/3$$

Entonces, $s = \theta \cdot R =$

$$= (\pi/3) \cdot 5m =$$
$$= (3.14\ldots/3) \cdot 5m$$
$$= 5.236\ m$$



Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

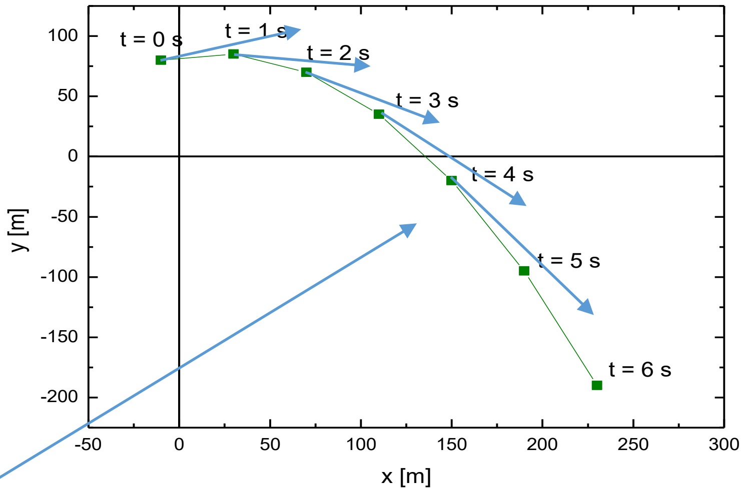
Velocidad angular:

$$\boxed{\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}}$$

$$\left[\frac{rad}{s}\right] \text{ o } \left[\frac{1}{s}\right]$$

Nótese la semejanza entre la definición para la velocidad angular, y la definición que vimos anteriormente para la velocidad ordinaria (o lineal):

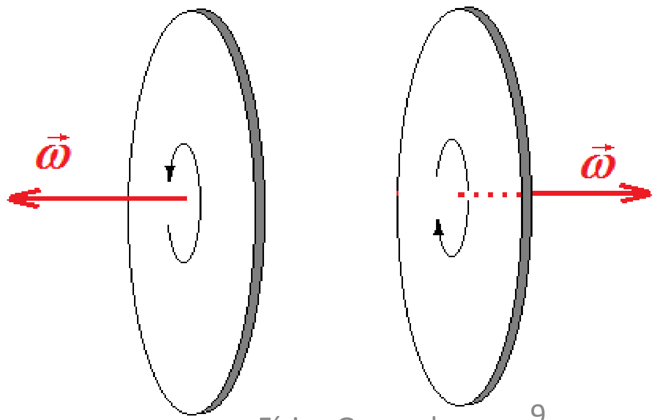
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Así como $\vec{v}(t)$ representa cómo varía la posición con el tiempo
$\omega(t)$ representa cómo varía el ángulo con el tiempo

Aunque hay algunas diferencias desde el punto de vista vectorial:
$\vec{v}(t)$ es, en todo punto, un vector tangente a la trayectoria $\vec{r}(t)$

En cambio, $\vec{\omega}(t)$ es un vector cuyo módulo es $\frac{d\theta}{dt}$ y cuya dirección es perpendicular al plano de giro, y cuyo sentido se determina por la regla de la mano derecha (o tirabuzón)



Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Aceleración angular: $\boxed{\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$ $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$ o $\left[\frac{1}{s^2}\right]$

Paralelismo entre las variables angulares utilizadas en el movimiento circular y las variables lineales utilizadas en el movimiento 1-D

Posición	x	$\longrightarrow$	*Ángulo*	θ
Velocidad	$v = \frac{dx}{dt}$	$\longrightarrow$	*Velocidad angular*	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleración	$a = \frac{dv}{dt}$	$\longrightarrow$	*Aceleración angular*	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Paralelismo entre las ecuaciones del movimiento circular y del movimiento 1-D

Movimiento 1-D

MRU

$$x(t) = x_0 + vt$$

MRUV

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

Movimiento Circular

MCU (movimiento circular uniforme)

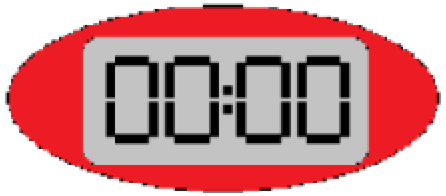
$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega t}$$

MCUV (mov. circ. uniformemente variado)

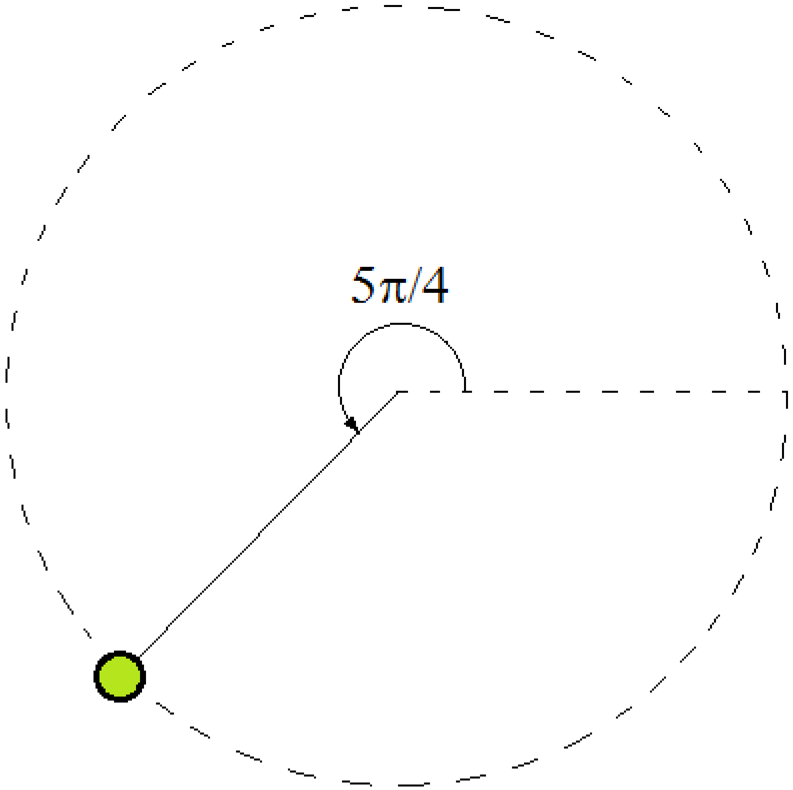
$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2}$$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t}$$

Ejemplo 1. Dar la ecuación que describe el siguiente movimiento circular

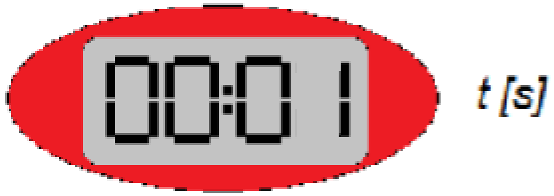


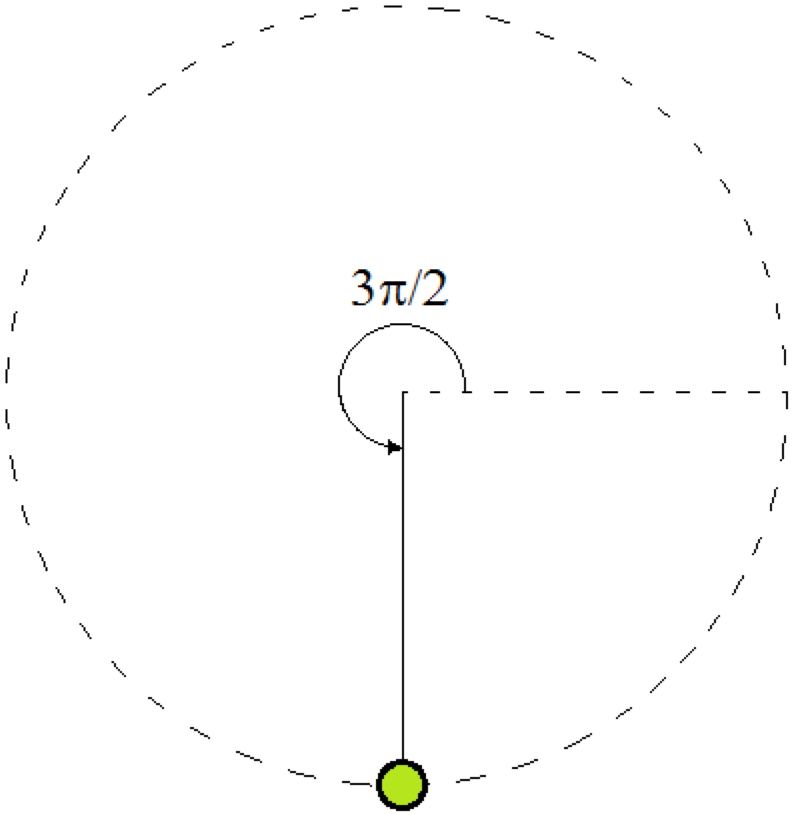
t [s]



(…sigue…)

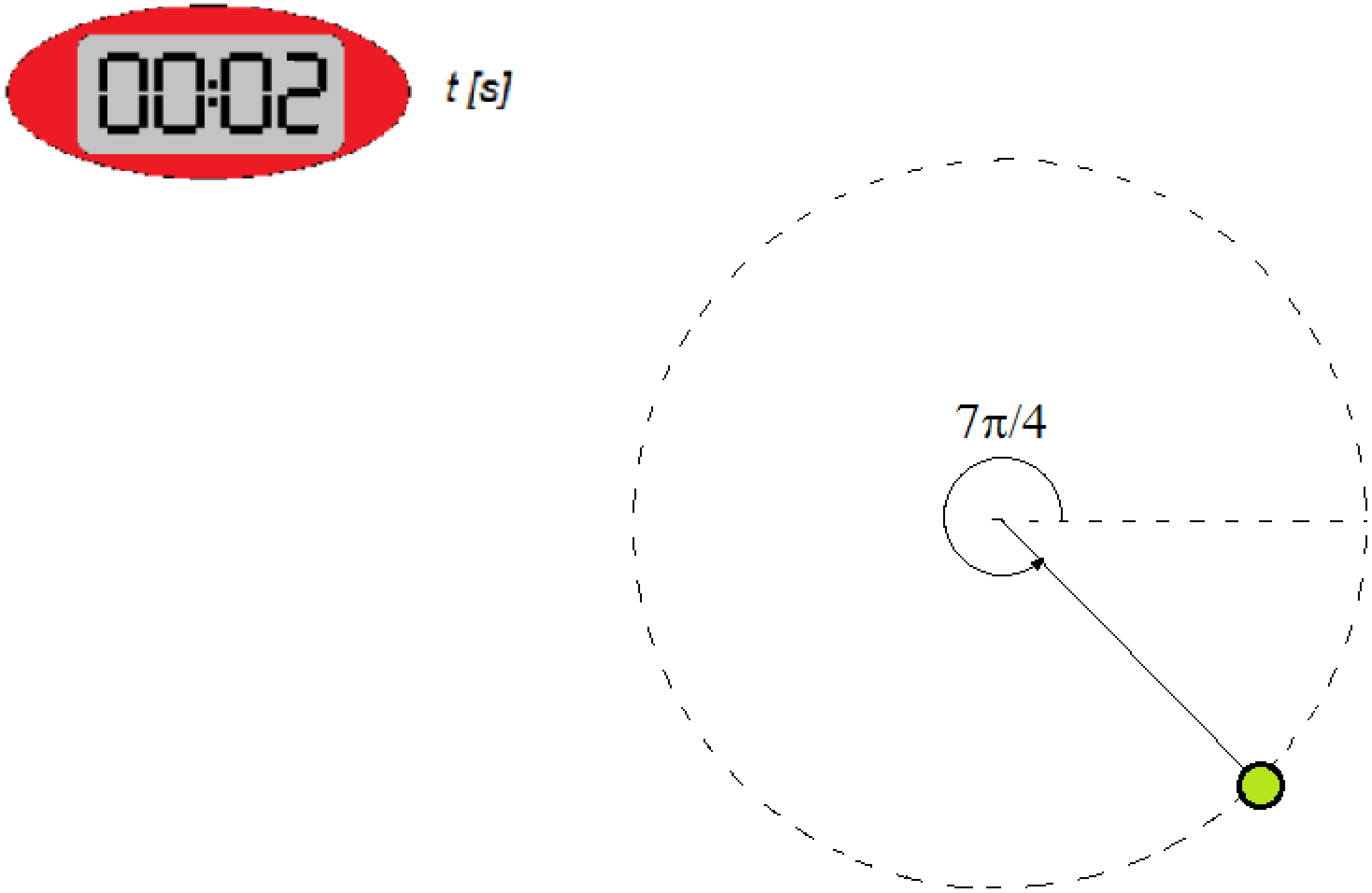
Ejemplo 1. Dar la ecuación que describe el siguiente movimiento circular





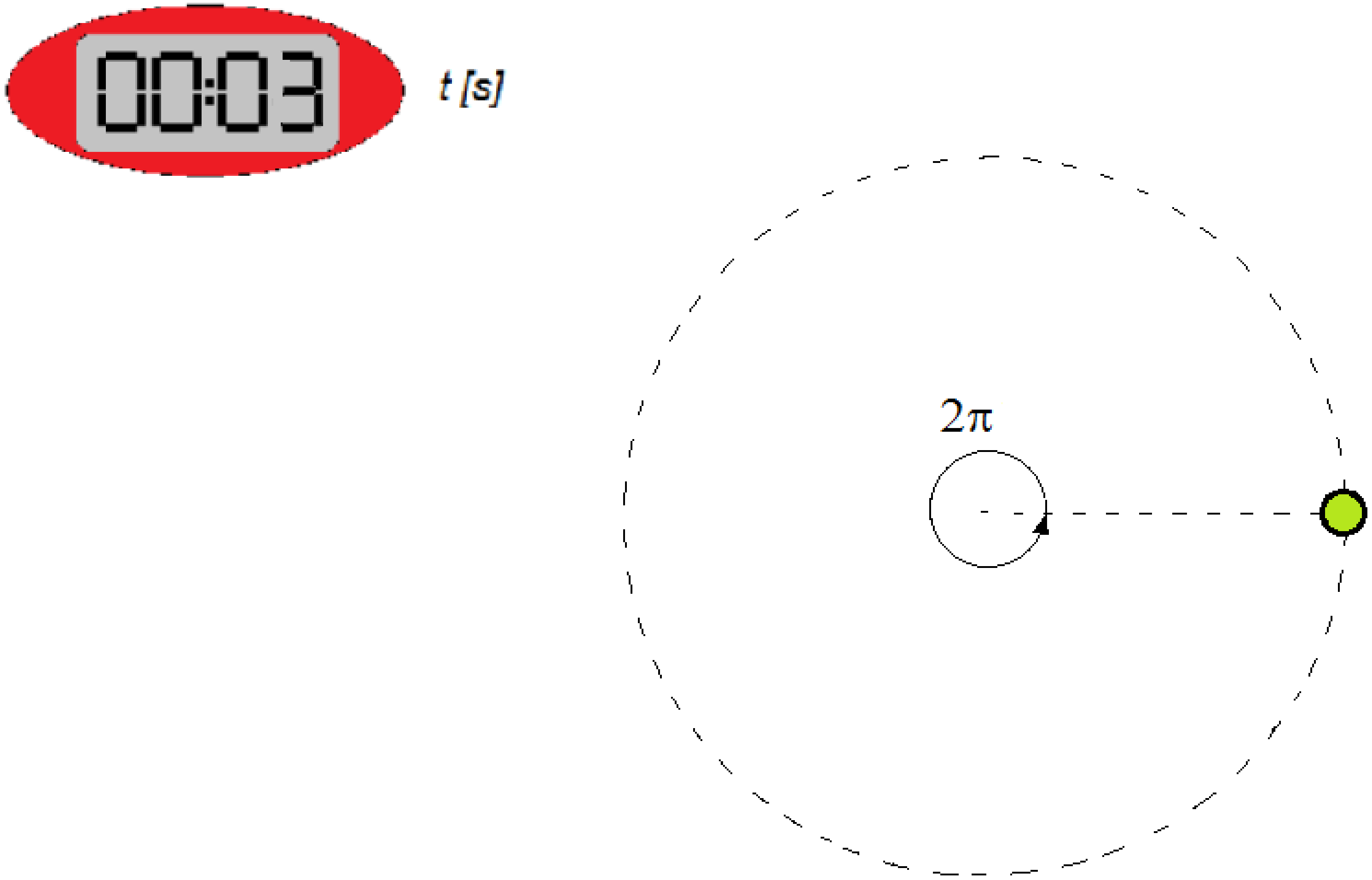
(...sigue...)

Ejemplo 1. Dar la ecuación que describe el siguiente movimiento circular



(…sigue…)

Ejemplo 1. Dar la ecuación que describe el siguiente movimiento circular



Rta:

Es un MCU

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

con

$$\theta_0 = \frac{5\pi}{4} rad$$

y

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\pi}{4} \frac{rad}{s}$$

Ecuación:

$$\theta(t) = \frac{5\pi}{4} rad + \frac{\pi}{4} \frac{rad}{s} t$$

Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR - Otras cantidades asociadas con el movimiento circular:

Frecuencia ***(f)***: Es la cantidad de giros (revoluciones) por segundo

Dado que la velocidad angular ω indica la cantidad de radianes por segundo.

Y dado que cada giro completo (revolución) equivale a *2π* radianes.

$$revoluciones/s = \frac{radianes/s}{radianes/revolución}$$

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

Período ***(τ)***: Es el tiempo, en *s*, requerido para un giro completo (revolución)

Dado que la frecuencia *f* indica la cantidad de revoluciones por segundo.

$$s/revolución = \frac{1}{revoluciones/s}$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{f}}$$

En definitiva: Las tres cantidades ω, f y τ cuantifican la velocidad de rotación. Si se conoce una cualquiera de las tres, se pueden deducir las otras dos con las fórmulas dadas

Otras relaciones (combinando las anteriores)

$$\boxed{f = \frac{1}{\tau}} \quad \boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega}} \quad \boxed{\omega = 2\pi f} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{\tau}}$$

Ejemplo 2. Hallar la frecuencia y el período del movimiento circular del Ejemplo 1.

Rta: Es un MCU $\Rightarrow$ $\omega = cte.$ $\Rightarrow$ $f, \tau = cte.$

Como $\omega = \dfrac{\pi}{4}\dfrac{rad}{s}$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi/4\, rad/s}{2\pi} = \frac{1}{8} rad/s = 0.125\ s^{-1} = 0.125\ Hz$$

Número de revoluciones por segundo

$\boxed{\text{Hertz} = s^{-1} = 1/s}$

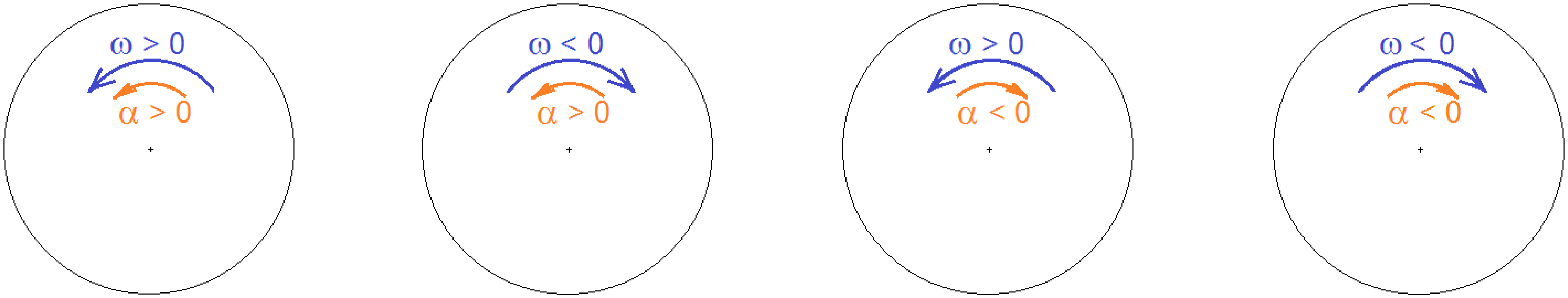
$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.125\ Hz} = \frac{1}{0.125\ s^{-1}} = 8s$$

Duración de una revolución

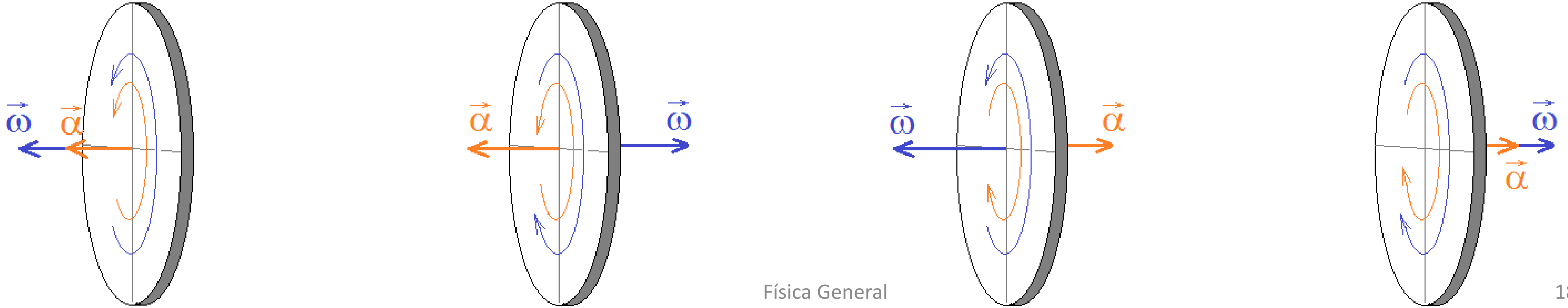
Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Convención de signos: Sentido antihorario → Positivo

Sentido horario → Negativo



Estrictamente hablando, ω y α son vectores. Para un eje de rotación fijo, ambos vectores apuntan en dirección del eje de rotación, y su sentido se determina por la regla de la mano derecha.



Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Ejemplo 3. Comenzando desde el reposo a $t = 0$, una rueda de molino tiene una aceleración angular constante de 3.2 rad/s^2. Determine: (a) el desplazamiento angular de rueda, y (b) la velocidad angular de la rueda cuando $t = 2.7\ s$.

Rta: Es un MCUV: $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$; $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

DATOS: $\alpha = 3.2\, rad/s^2$; como la rueda parte desde el reposo, $\omega_0 = 0$; además (dado que no indica lo contrario) podemos tomar, por comodidad, $\theta_0 = 0$.

Las ecuaciones de movimiento quedan: $\theta(t) = \frac{1}{2}(3.2\, rad/s^2)t^2$; $\omega(t) = 3.2\frac{rad}{s^2}t$.

Reemplazando $t = 2.7\ s$ obtengo: (a) $\theta(2.7\ s) = 11.67\, rad = 1.86\, rev$; (b) $\omega(2.7\ s) = 8.64\frac{rad}{s} = 1.38\frac{rev}{s}$

Ejemplo 4. Suponga que se corta la energía cuando la rueda del problema anterior está girando con una velocidad de 8.6 rad/s. Una pequeña fuerza de fricción causa una desaceleración angular constante , y la rueda finalmente se detiene en un tiempo de 192 s. Determinar: (a) la aceleración angular; (b) el ángulo que gira la rueda desde que se corta la energía hasta que se detiene por completo.

Rta: Es un MCUV, pero distinto al anterior (ahora la rueda se está deteniendo). Ahora α es una incógnita; DATOS: $\omega_0 = 8.6\, rad/s$; $\omega(192s) = 0$; podemos considerar, sin inconvenientes, $\theta_0 = 0$.

(a) $\omega(192s) = 8.6\ rad/s + \alpha \cdot 192\ s = 0$ $\rightarrow$ $\alpha = \frac{-8.6\, rad/s}{192\ s} = -0.045\frac{rad}{s^2}$

(b) $\theta(192s) = 8.6\ rad/s \cdot 192\ s + \frac{1}{2}(-0.045\ rad/s^2) \cdot (192\ s)^2 = 821.76\, rad = 130.79\, rev$

Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Relaciones entre las variables angulares y lineales

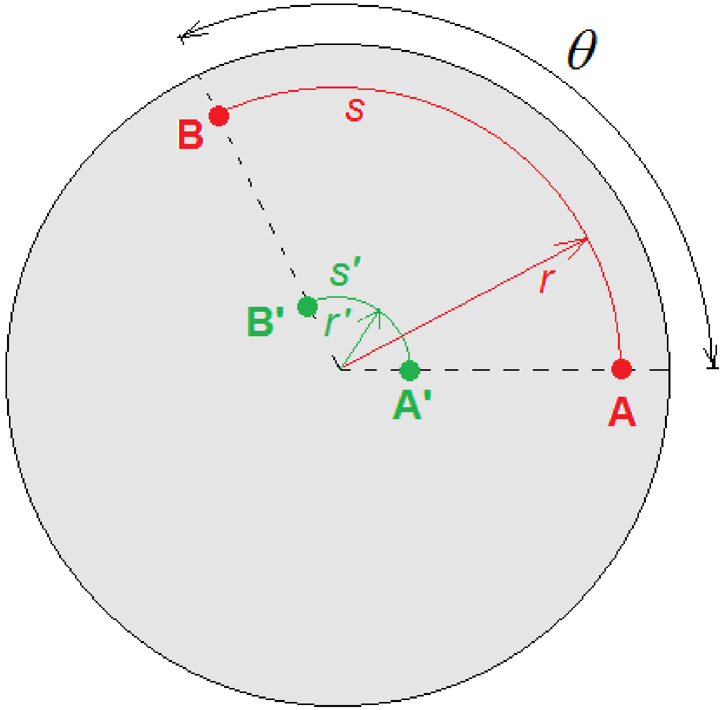
Recordemos que...

Radio de giro (constante, para un punto dado)

$$\boxed{s = \theta R}$$

Distancia recorrida por el punto

Ángulo girado por el punto



$$s = \theta r$$
$$s' = \theta r'$$

El módulo de la velocidad lineal del punto será...

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta R) = \frac{d\theta}{dt} R = \omega R$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \omega R}$$

Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Relaciones entre las variables angulares y lineales

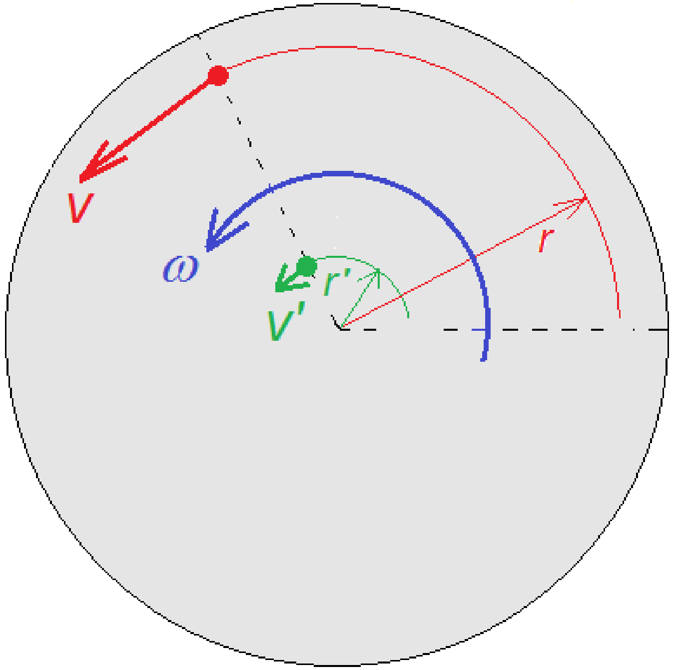
Recordemos que…

Radio de giro (constante, para un punto dado)

$$\boxed{s = \theta R}$$

Distancia recorrida por el punto

Ángulo girado por el punto



$v = \omega r$

$v' = \omega r'$

El módulo de la velocidad lineal del punto será…

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta R) = \frac{d\theta}{dt}R = \omega R$$

$$\boxed{v = \omega R}$$

El módulo de la aceleración tangencial del punto será…

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \frac{d\omega}{dt}R = \alpha R$$

Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Relaciones entre las variables angulares y lineales

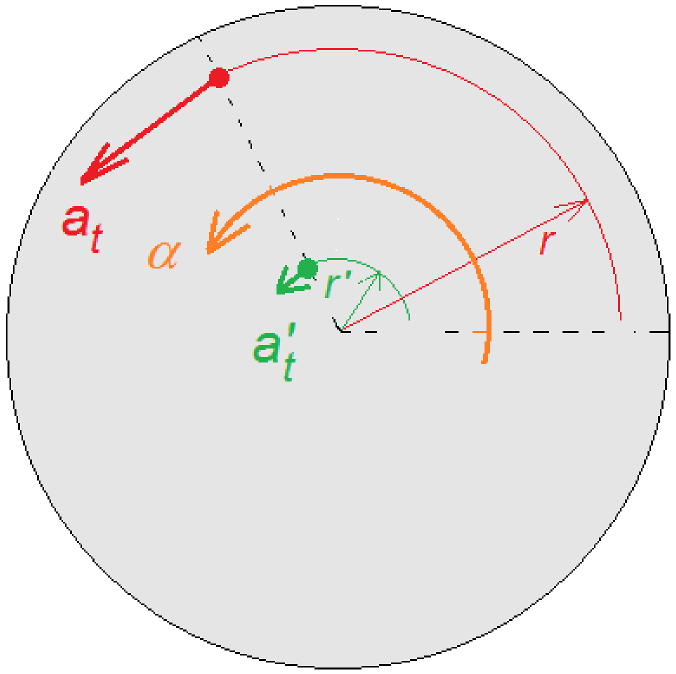
Recordemos que…

$$\boxed{s = \theta R}$$

Radio de giro (constante, para un punto dado)

Distancia recorrida por el punto

Ángulo girado por el punto



$$a_t = \alpha r$$
$$a'_t = \alpha r'$$

El módulo de la velocidad lineal del punto será…

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta R) = \frac{d\theta}{dt} R = \omega R$$

$$\boxed{v = \omega R}$$

El módulo de la aceleración tangencial del punto será…

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$$

$$\boxed{a_t = \alpha R}$$

Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Una relación que puede ser útil:

Como

$$a_C = \frac{v^2}{R}$$

y

$$v = \omega R$$

Combinando:

$$a_C = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

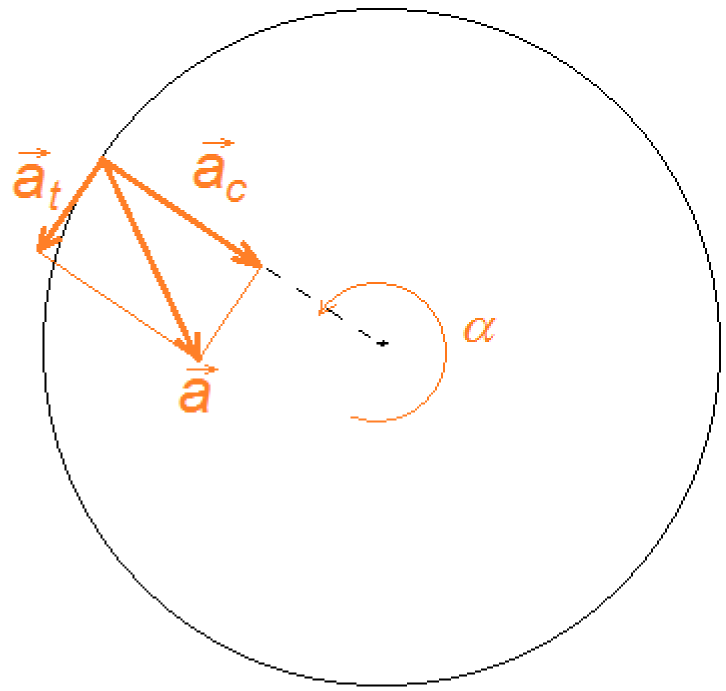
$$\Rightarrow \boxed{a_C = \omega^2 R}$$

Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Nótese que en el movimiento circular existen dos aceleraciones lineales (en m/s^2):

La centrípeta o radial, $a_C = v^2/R$ → Siempre ≠ 0, incluso en un MCU

La tangencial, $a_t = \alpha R$ → = 0 en un MCU,
≠ 0, si α ≠ 0.



La aceleración centrípeta $\vec{a}_C$ siempre está dirigida hacia el centro de la circunferencia

La aceleración tangencial $\vec{a}_t$ es siempre tangente a la circunferencia

→ $\vec{a}_C$ y $\vec{a}_t$ son siempre mutuamente perpendiculares

→ El módulo de la aceleración total $\vec{a}$ se puede calcular con T. de Pitágoras:

$$a = \sqrt{a_C^2 + a_t^2}$$

Cinemática del MOVIMIENTO CIRCULAR

Ejemplo 5. El cilindro de un secarropas acelera uniformemente tras ser encendido, alcanzando una velocidad de 600 rpm a los 2 s. El radio del cilindro es de 40 cm. Hallar: (a) la aceleración angular; (b) la aceleración centrípeta, tangencial y total de un punto sobre el borde del cilindro cuando t = 0.5s.

Rtas. (a) Se entiende que parte del reposo, así que $\omega_0 = 0$.
A los 2 s gira a 600 rpm, que puede interpretarse como una velocidad angular:

$$\omega(2s) = 600\, rpm = 600\frac{rev}{\min} = 600 \cdot \frac{2\pi\, rad}{60\, s} = 62.83\ \frac{rad}{s}$$

Para calcular α utilizo: $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

Reemplazando con los datos: $\omega(2\, s) = \alpha \cdot 2s = 62.83\frac{rad}{s}$ → $\alpha = 31.415\frac{rad}{s^2}$

(b) Para calcular a_C, debo conocer v (o ω) cuando t=0.5s:

$$\omega(0.5s) = \alpha \cdot 0.5s = 31.415\frac{rad}{s^2} \cdot 0.5s = 15.708\frac{rad}{s}$$

$$a_C(0.5s) = [\omega(0.5s)]^2 \cdot R = \left(15.708\frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 0.4\, m = 98.690\frac{m}{s^2}$$

Por otro lado, $a_t = \alpha \cdot R = 31.415\frac{rad}{s^2} \cdot 0.4\, m = 12.566\, m/s^2$

Note que se ignoraron los radianes

El módulo de la aceleración total será: $a = \sqrt{a_C^2 + a_t^2} = 99.487\, m/s^2$

Dinámica del MOVIMIENTO CIRCULAR

Dado que, como hemos visto, en cualquier movimiento circular hay, al menos, una aceleración (la a_c)

Y dado que, de acuerdo con la segunda ley de Newton, siempre que hay una aceleración hay una fuerza.

Entonces, en todo movimiento circular existe al menos una fuerza en la dirección radial hacia el centro de giro.

Dicha fuerza se llama Fuerza Centrípeta (o Central):

$$\boxed{F_C = ma_C}$$

$$\boxed{F_C = m\frac{v^2}{R}}$$

$$\boxed{F_C = m\omega^2 R}$$

No son tres fórmulas distintas, es la misma fórmula escrita de tres diferentes maneras

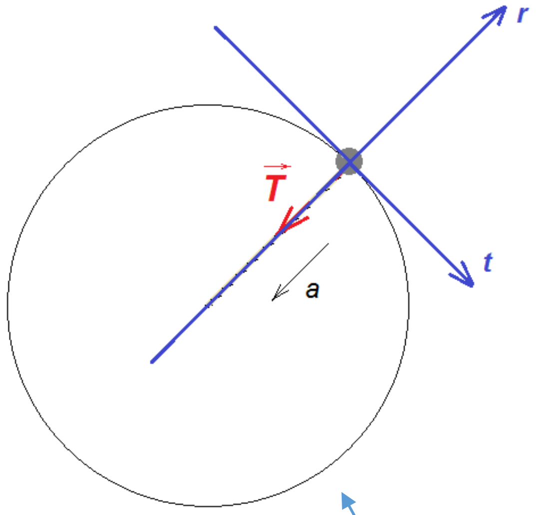
Dinámica del MOVIMIENTO CIRCULAR

Ejemplo 6. Una bola de 0.500 kg está atada al extremo de una cuerda cuya longitud es 1.50 m. Se hace girar la bola en un círculo horizontal. Si la cuerda puede soportar una tensión máxima de 50 N, ¿cuál es la velocidad máxima que puede alcanzar la bola antes de que se corte la cuerda? (del libro "Física", Tomo 1, Raymond A. Serway, ver bibliografía)

Rta. La bola se mueve en un círculo horizontal. ¿Cuál es la fuerza que la obliga a realizar el movimiento circular?

O sea, ¿quién es F_C en este caso?

¡La tensión en la cuerda!



Vista superior

Para hacer la descomposición de fuerzas, conviene tomar un eje en la dirección radial y otro en la dirección tangencial (y otro, eventualmente, en la dirección perpendicular al plano en que ocurre el movimiento)

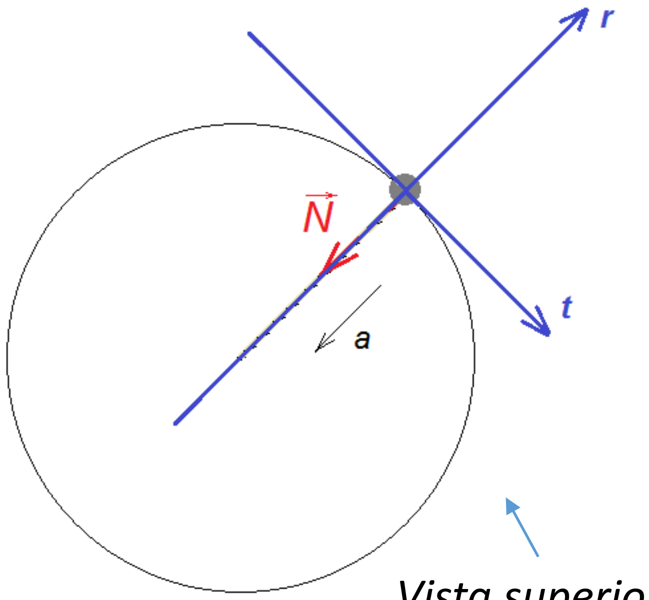
$$\sum F_r = ma_C \qquad \sum F_t = 0$$

$$T = m\frac{v^2}{R}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{RT_{max}}{m}} \longrightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{1.5m \cdot 50N}{0.5\ kg}} = 12.25\ \mathrm{m/s}$$

Ejemplo 7. Un secarropas centrífugo funciona a 2800 rpm. El radio de su cilindro es de 15 cm. ¿Con qué fuerza presionará sobre la pared del cilindro del secarropas una prenda de 100 g de masa?

Rta. ¿Cuál es la fuerza que obliga a la ropa a realizar el movimiento circular?
O sea, ¿quién es F_C en este caso?



Vista superior

¡La normal de la pared del tambor!

$$\sum F_r = ma_C \qquad \sum F_t = 0$$

$$N = m\omega^2 R$$

$$N = 1289.6\ N$$

Lo que calculamos es en realidad la fuerza que hace el cilindro del secarropas *sobre* la prenda.
Pero sabemos, por el principio de acción y reacción, que la fuerza que hace la prenda *sobre* el cilindro es igual en módulo pero de sentido contrario.

Dinámica del MOVIMIENTO CIRCULAR

Ejemplo 8. Un disco de vinilo gira a 45 rpm. Se coloca una moneda, de 10 g de masa, a 12 cm del centro del disco, de forma tal que la moneda se mueve con la misma velocidad angular que el disco (no desliza). ¿Cuál es la fuerza centrípeta en este caso? ¿Cuánto vale?

Rta. Dado que la moneda describe un MCU, debe haber una fuerza centrípeta. En este caso, es la fuerza de roce $\vec{f}_r$:

El análisis es similar al de los problemas anteriores:

$$\sum F_r = ma_C \qquad \sum F_t = 0$$

$$\downarrow$$

$$f_r = m\omega^2 R$$

$$\downarrow$$

$$f_r = 0.01\ kg \cdot \left(45 \cdot \frac{2\pi\ rad}{60\ s}\right)^2 \cdot 0.12m = 0.027\ N$$