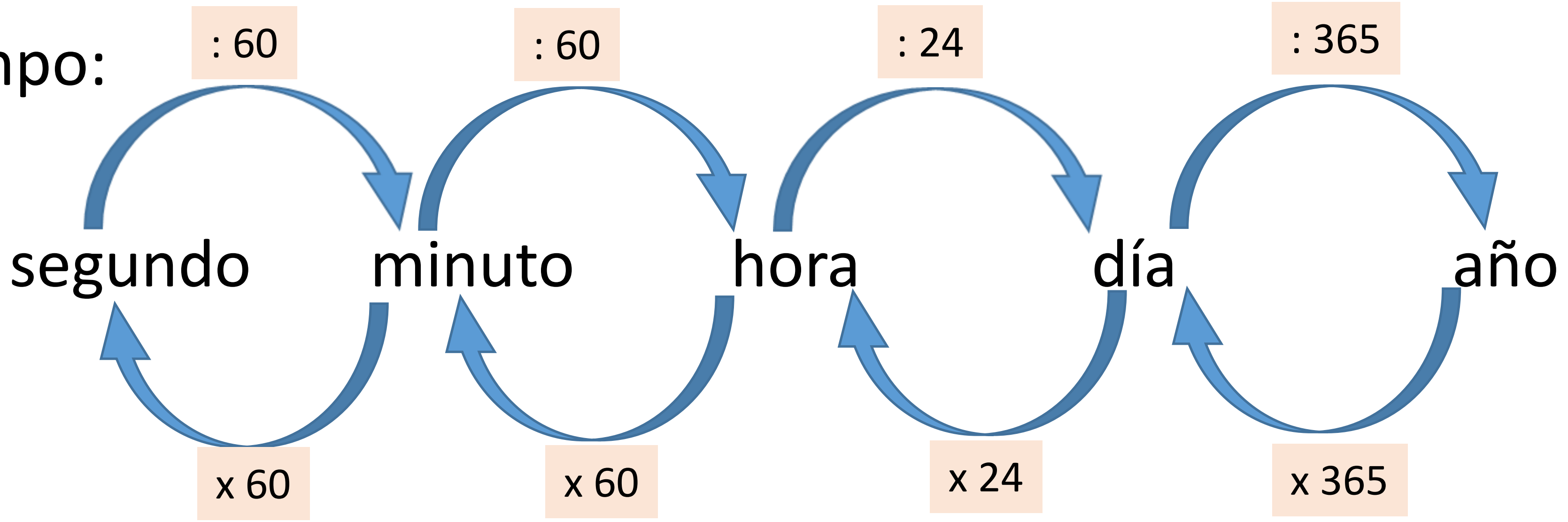
CINEMÁTICA (resumen)

MEDICIÓN – UNIDADES FUNDAMENTALES
Sistema Internacional (SI)

• Tiempo	segundo (otros: hora, día, minuto,…)
• Distancia (longitud, espacio)	metro (otros: milla, kilómetro,…)
• Masa	kilogramo (otros: gramo, miligramo, …)
• Temperatura	grado Kelvin
• Corriente eléctrica	ampere
• Cantidad de sustancia	mol
• Intensidad luminosa	candela

Conversiones de Unidades más usuales

- Tiempo:

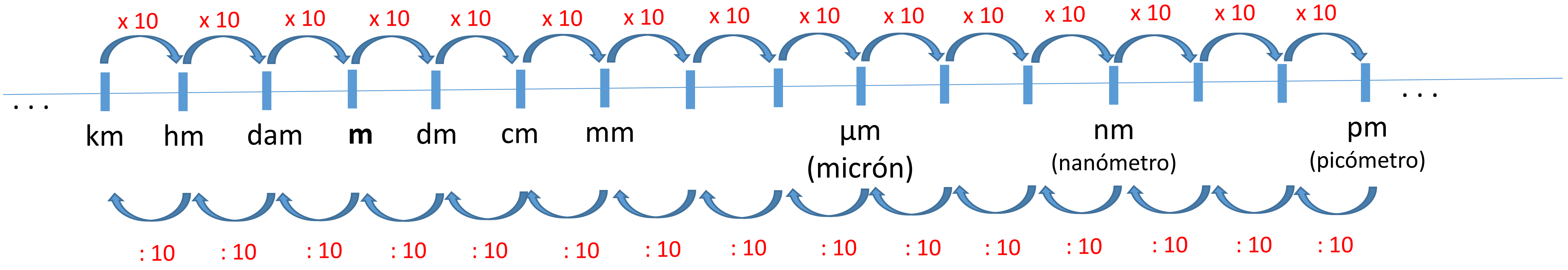


Ej) ¿A cuántos días equivalen 18364 s?

Rta: 18364 s = (18364/60) min = 306.07 min = (306.07/60) h = 5.11 h = (5.11/24) d = 0.22 d

Pasaje de Unidades más usuales (II)

- Longitud (o distancia): múltiplos del metro



CINEMÁTICA

Rama de la Física que estudia el ***movimiento*** de los objetos

¿Qué es el movimiento?
¿Cómo se describe?

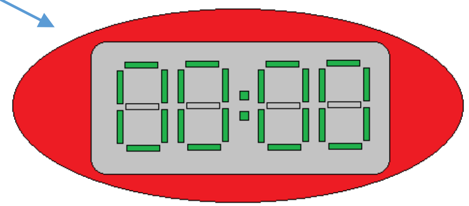
Variables fundamentales:

- Posición (espacio), *x*
  o *(x, y)*
  o *(x, y, z)*

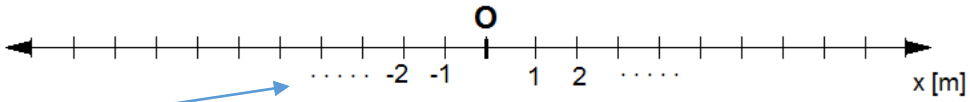
(es una magnitud <u>vectorial</u>)

- Tiempo *t*

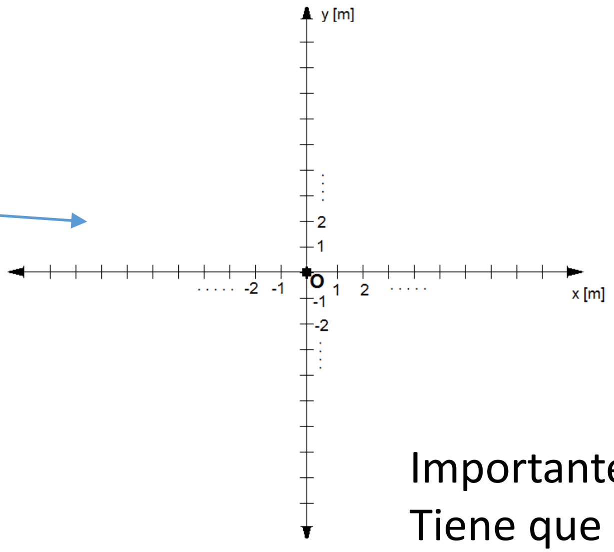
(es un <u>escalar</u>)



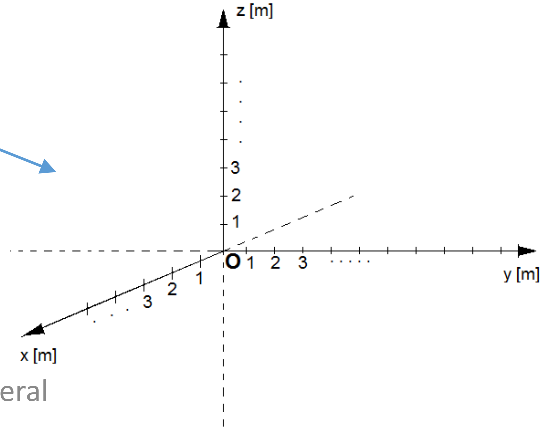
1-D



2-D



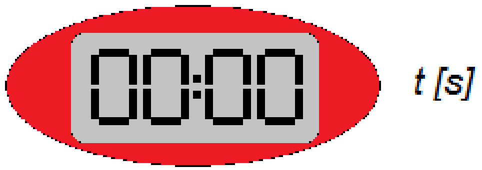
3-D

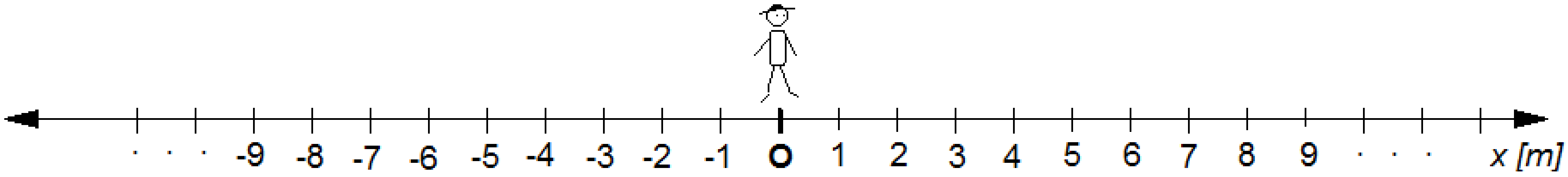


Importante:
Tiene que haber un origen **O**, y un eje por cada dimensión

MOVIMIENTOS EN UNA DIMENSIÓN (1-D)

Ejemplo 1. Queremos describir como varía la posición en <u>función</u> del tiempo, *x=x(t)*



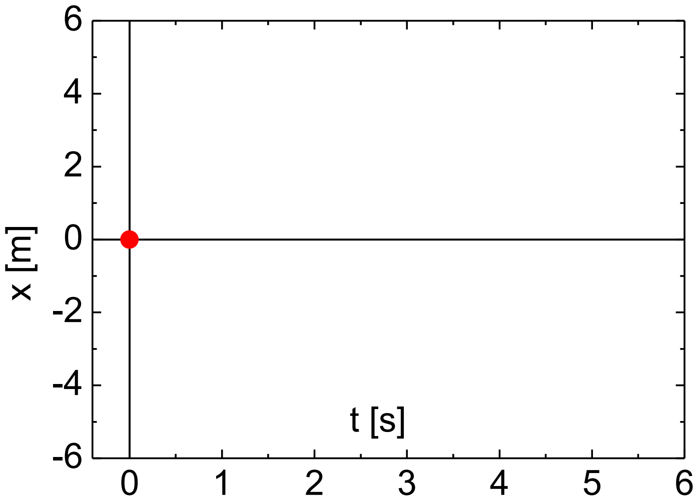


¿Cómo podemos describir esto?

(A) Con una Tabla

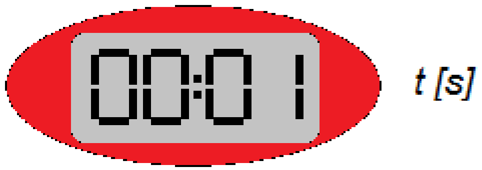
t [s]	x [m]
0	0
-	-
-	-
-	-
-	-
-	-

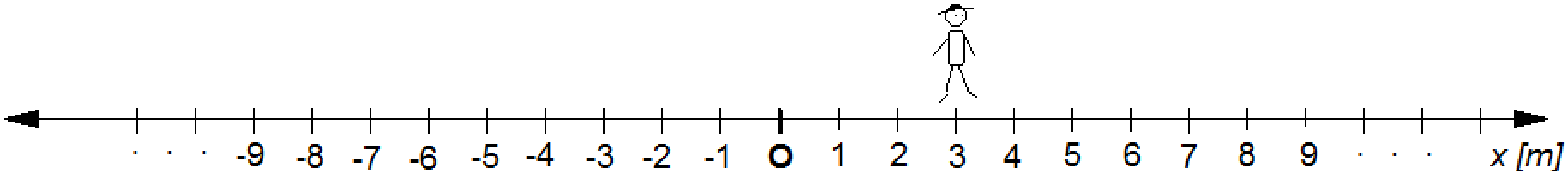
(B) Con un Gráfico



MOVIMIENTOS EN UNA DIMENSIÓN (1-D)

Ejemplo 1. Queremos describir como varía la posición en <u>función</u> del tiempo, *x=x(t)*



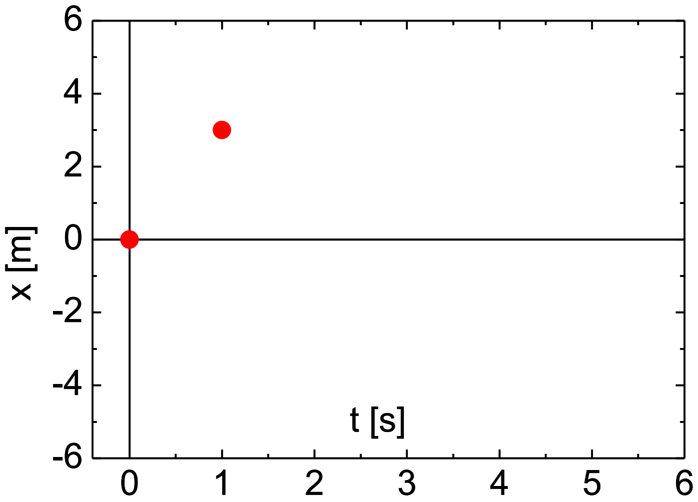


¿Cómo podemos describir esto?

(A) Con una Tabla

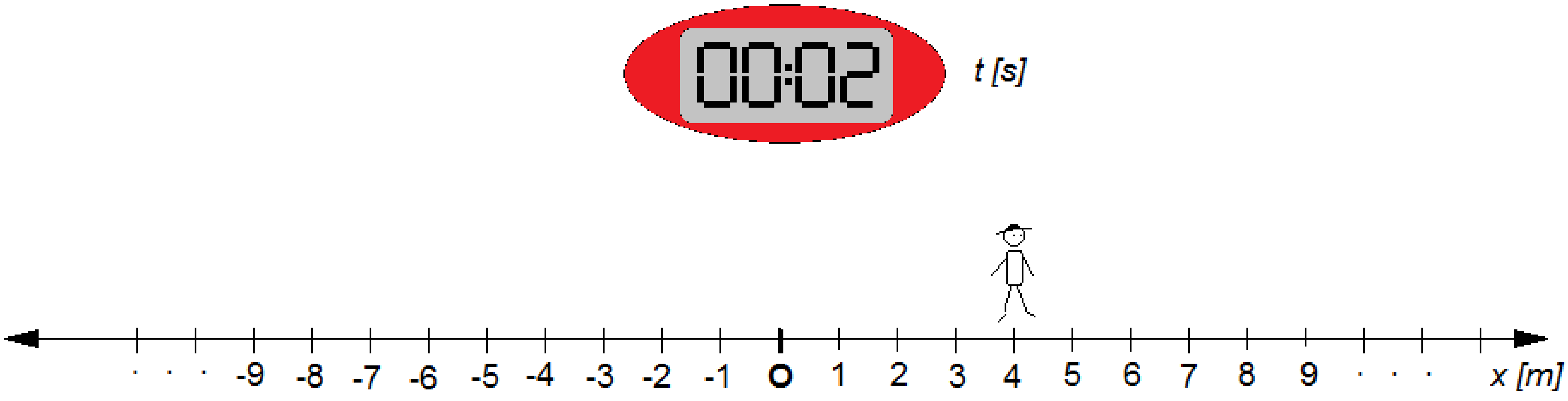
t [s]	x [m]
0	0
1	3
-	-
-	-
-	-
-	-

(B) Con un Gráfico



MOVIMIENTOS EN UNA DIMENSIÓN (1-D)

Ejemplo 1. Queremos describir como varía la posición en <u>función</u> del tiempo, *x=x(t)*

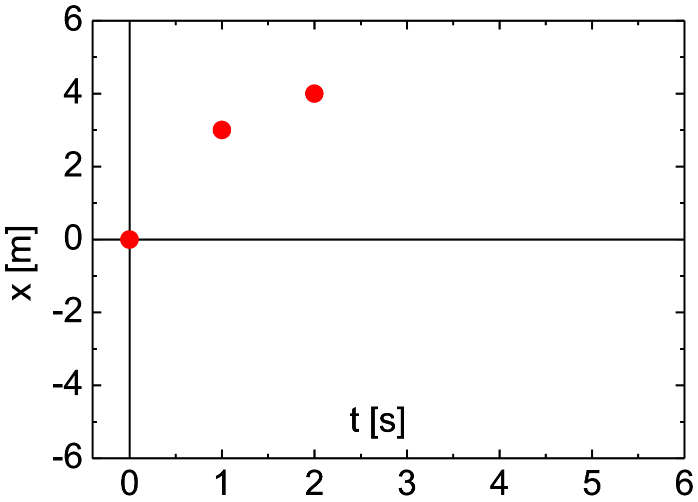


¿Cómo podemos describir esto?

(A) Con una Tabla

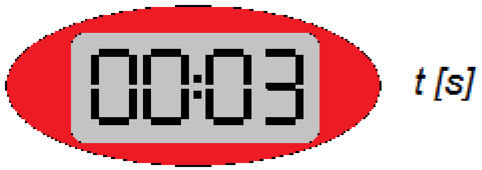
t [s]	x [m]
0	0
1	3
2	4
-	-
-	-
-	-

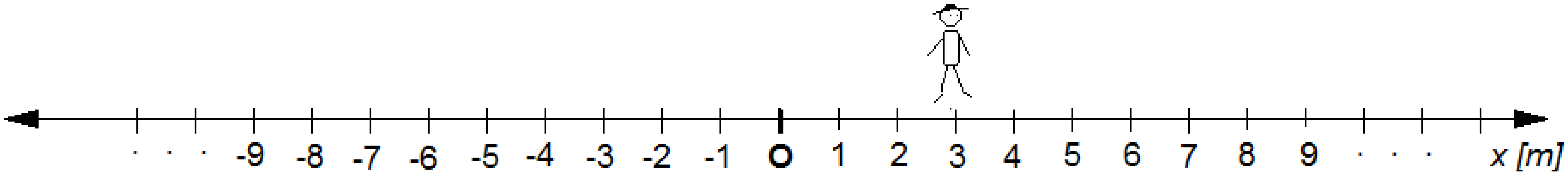
(B) Con un Gráfico



MOVIMIENTOS EN UNA DIMENSIÓN (1-D)

Ejemplo 1. Queremos describir como varía la posición en <u>función</u> del tiempo, *x=x(t)*



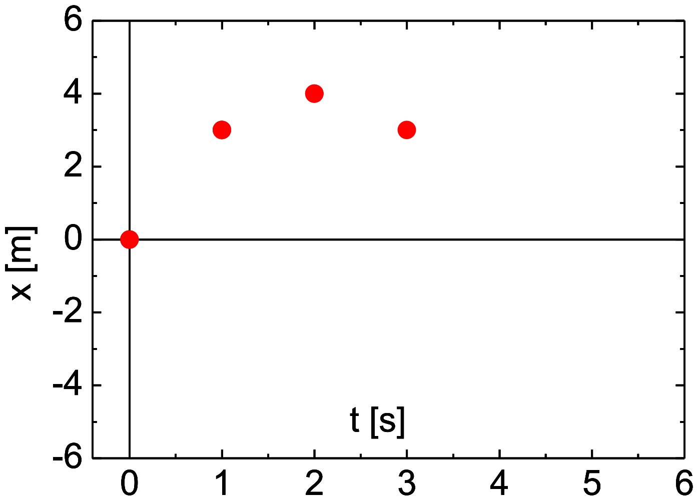


¿Cómo podemos describir esto?

(A) Con una Tabla

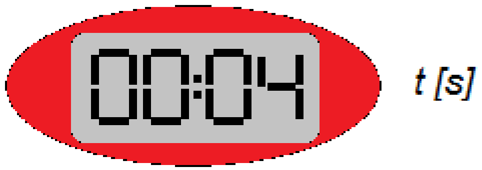
t [s]	x [m]
0	0
1	3
2	4
3	3
-	-
-	-

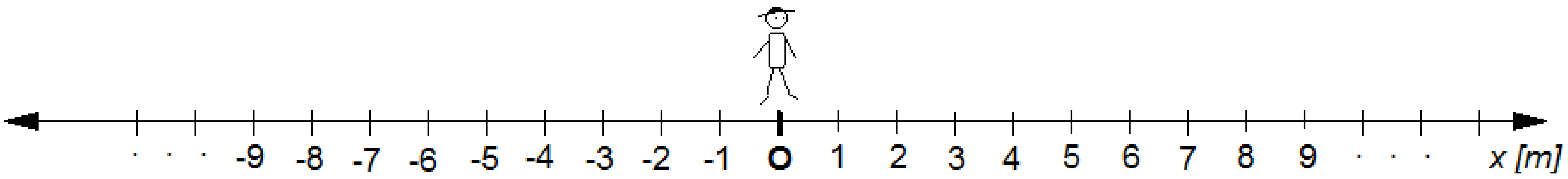
(B) Con un Gráfico



MOVIMIENTOS EN UNA DIMENSIÓN (1-D)

Ejemplo 1. Queremos describir como varía la posición en <u>función</u> del tiempo, *x=x(t)*



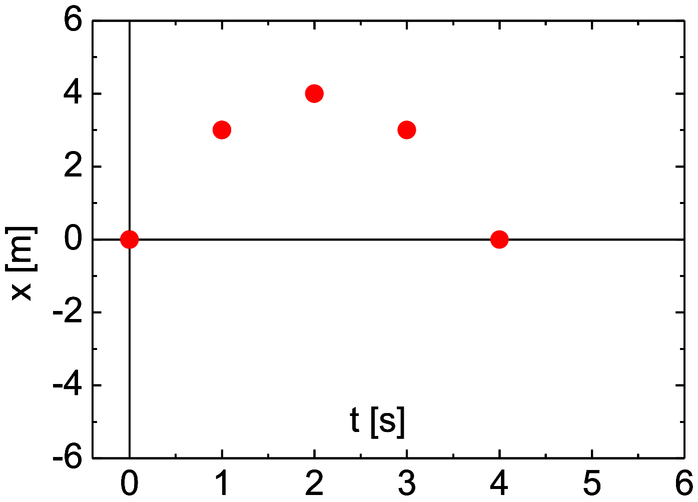


¿Cómo podemos describir esto?

(A) Con una Tabla

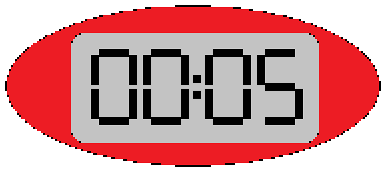
t [s]	x [m]
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-	-

(B) Con un Gráfico

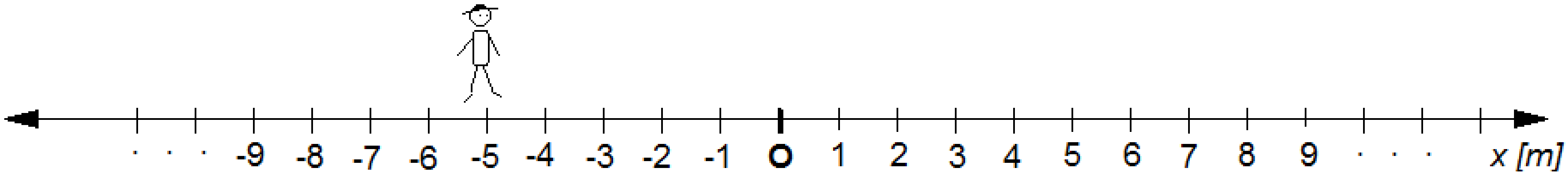


MOVIMIENTOS EN UNA DIMENSIÓN (1-D)

Ejemplo 1. Queremos describir como varía la posición en <u>función</u> del tiempo, *x=x(t)*



t [s]

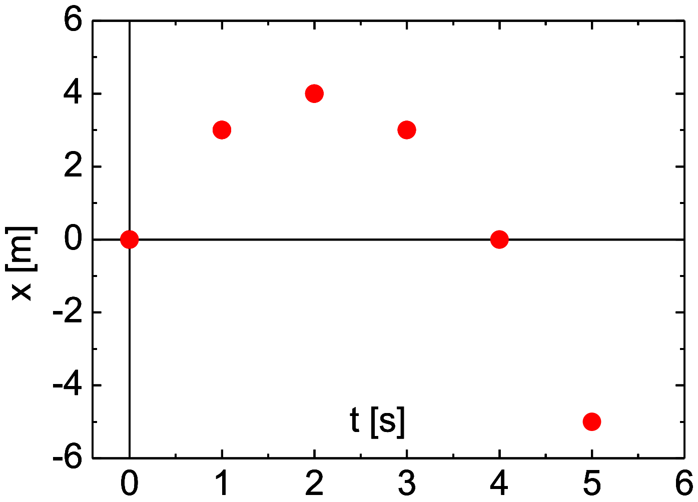


¿Cómo podemos describir esto?

(A) Con una Tabla

t [s]	x [m]
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
5	-5

(B) Con un Gráfico



(C) Con una Fórmula

$$\boxed{x(t) = 4 \cdot t - 1 \cdot t^2}$$

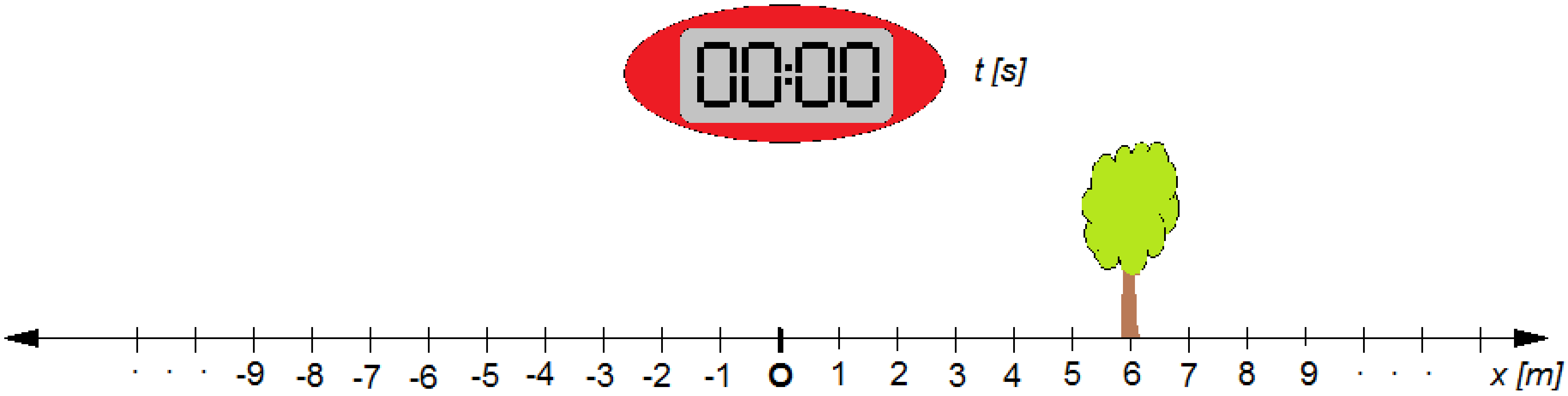
O mejor aún, para que den correctamente las unidades:

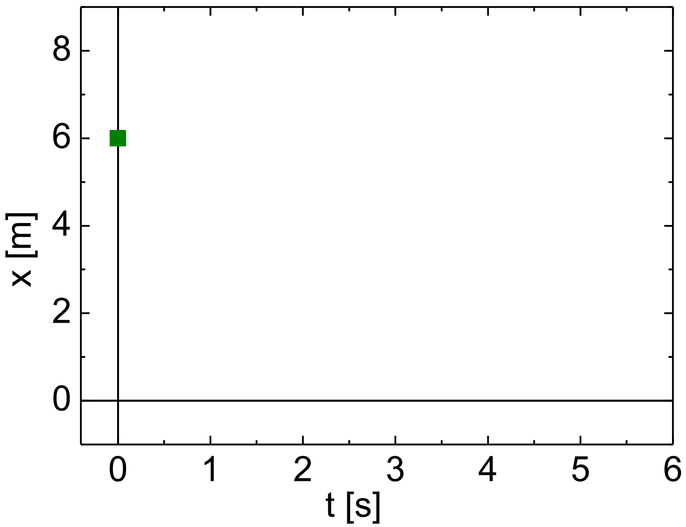
$$\boxed{x(t) = 4\frac{m}{s} \cdot t - 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2}$$

<u>Atención</u>: *x* y *t* → variables!
m y *s* → unidades!

MOVIMIENTOS EN 1-D

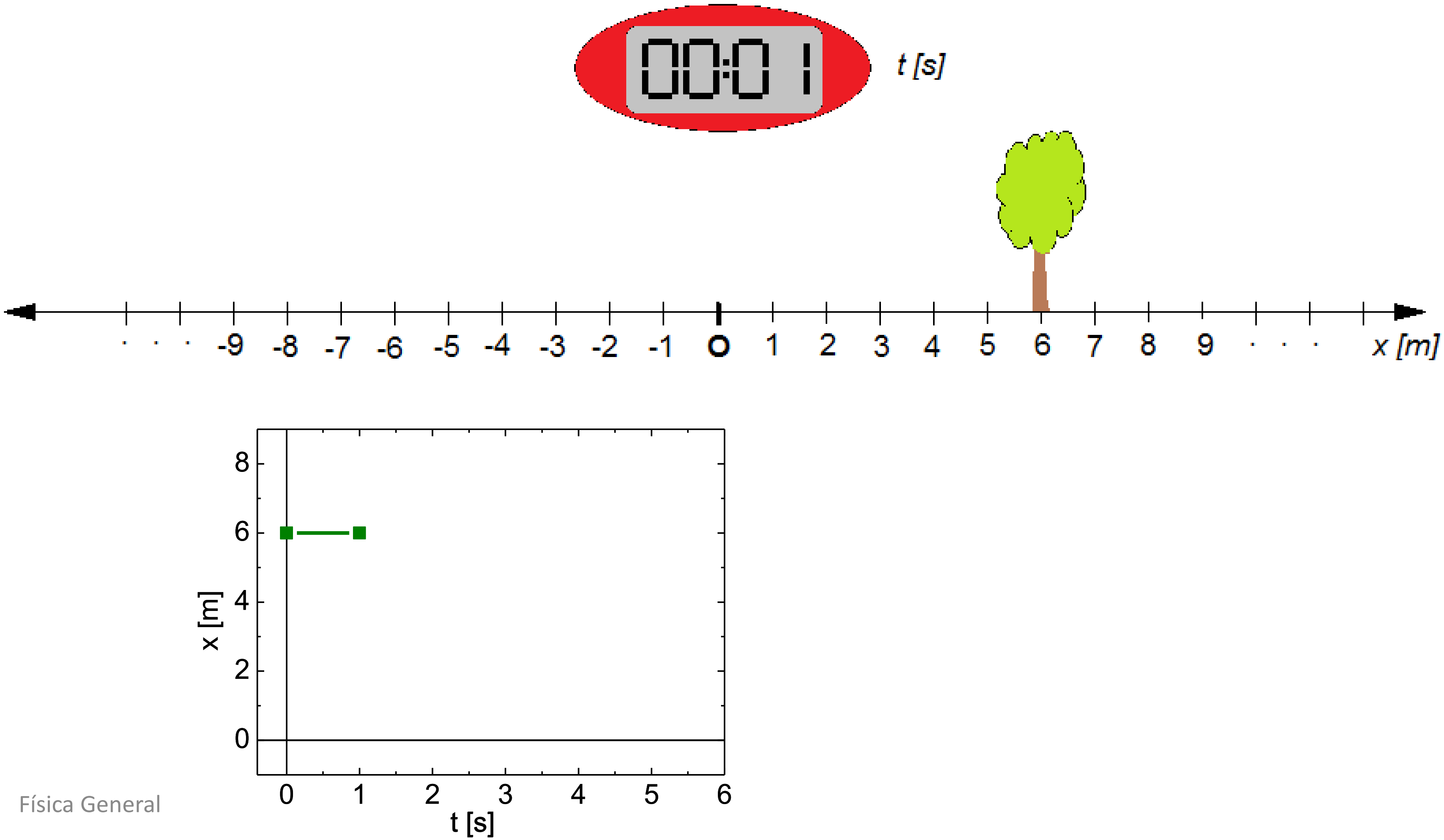
Ejemplo 2: El objeto permanece inmóvil





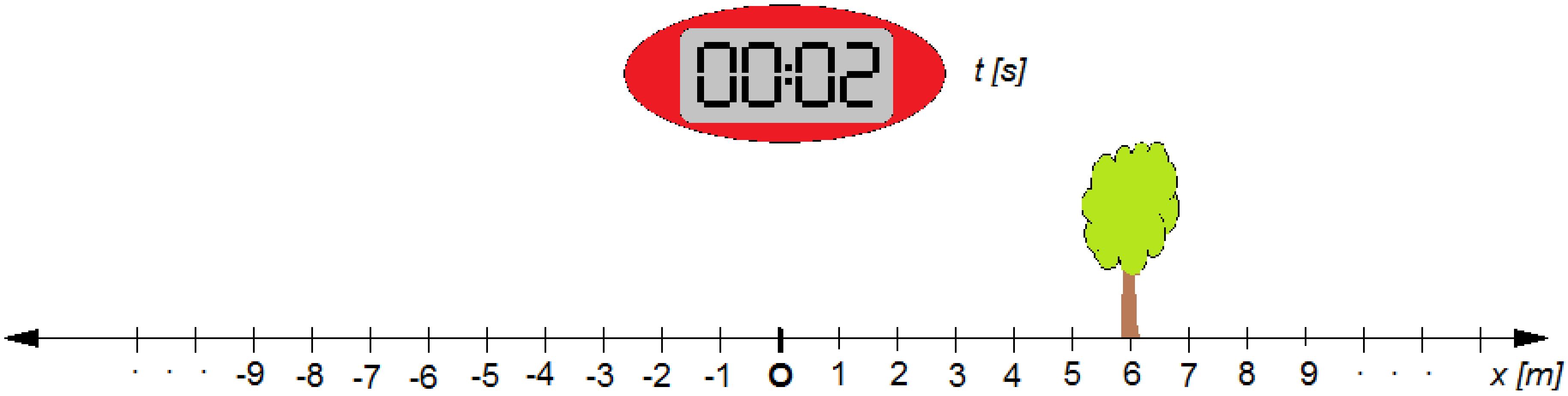
MOVIMIENTOS EN 1-D

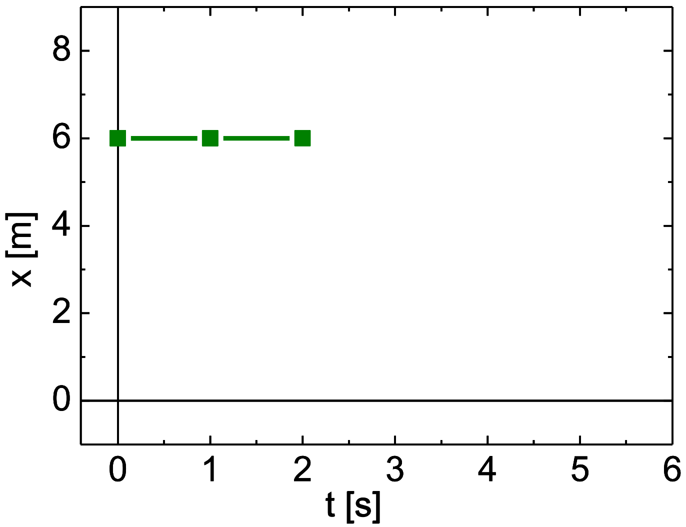
Ejemplo 2: El objeto permanece inmóvil



MOVIMIENTOS EN 1-D

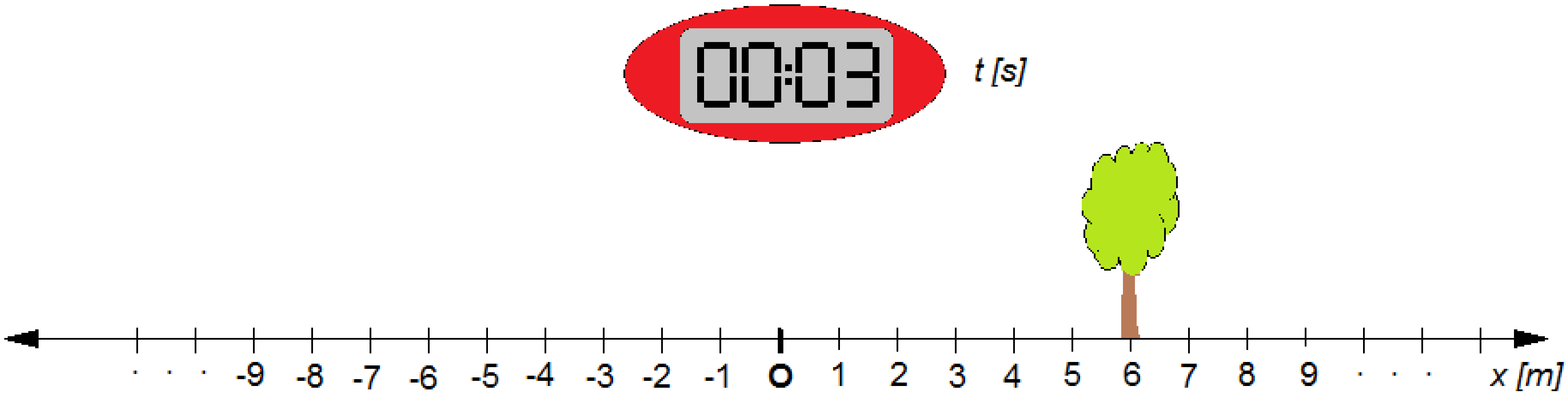
Ejemplo 2: El objeto permanece inmóvil

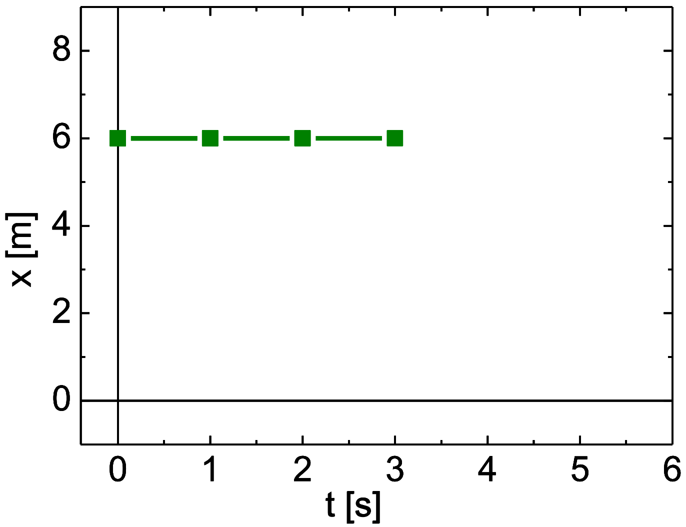




MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 2: El objeto permanece inmóvil





Ecuación:

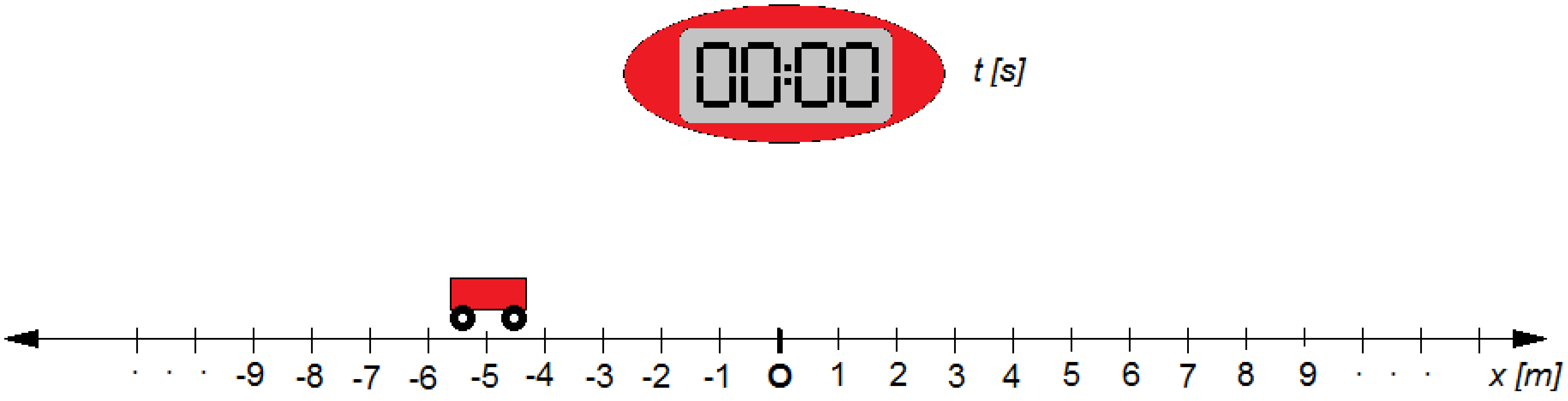
Diremos que: $\boxed{x(t) = \text{cte.}}$

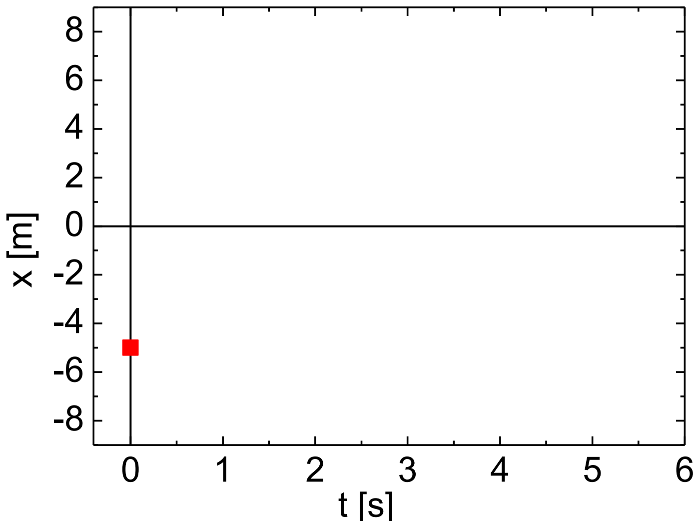
O, como la constante coincide con el valor inicial: $\boxed{x(t) = x_0}$

O, en este caso en particular, que: $x_{árbol}(t) = 6\text{ m}$

MOVIMIENTOS EN 1-D

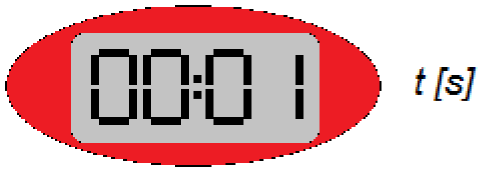
Ejemplo 3: El objeto se mueve con velocidad (???) constante

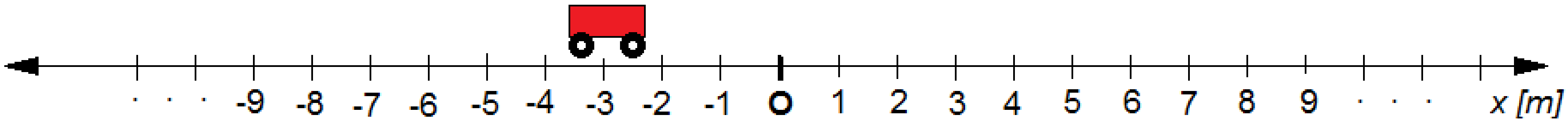


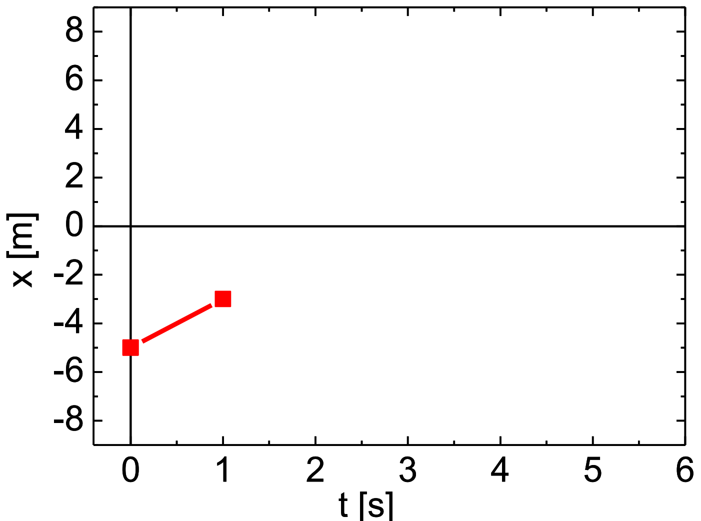


MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 3: El objeto se mueve con velocidad (???) constante

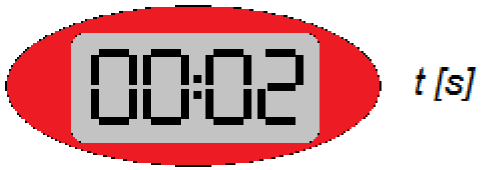


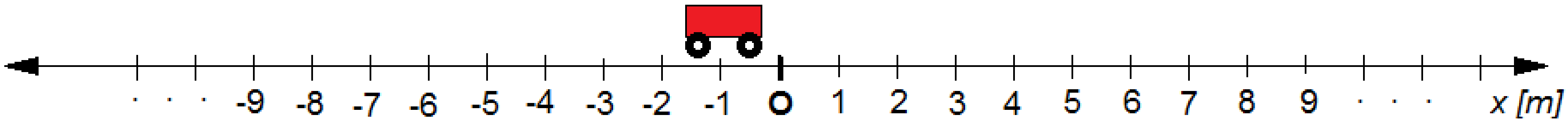


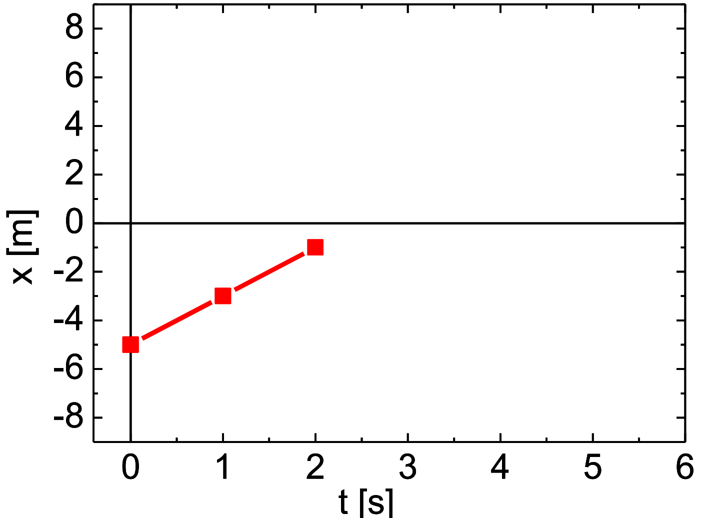


MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 3: El objeto se mueve con velocidad (???) constante

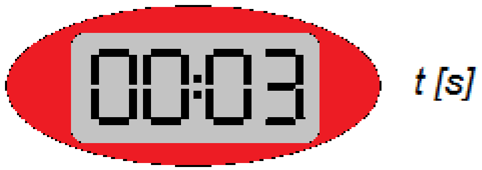


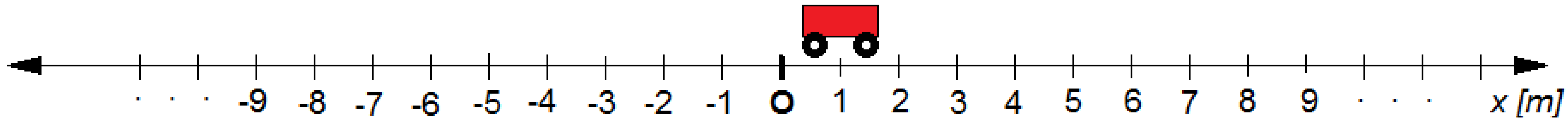


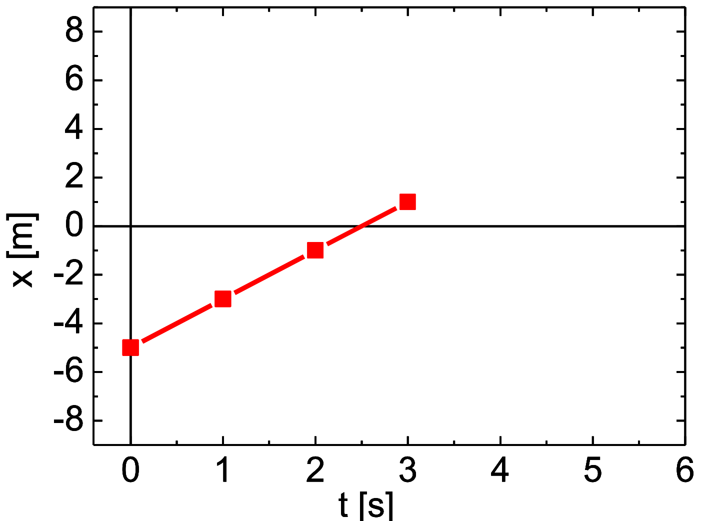


MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 3: El objeto se mueve con velocidad (???) constante

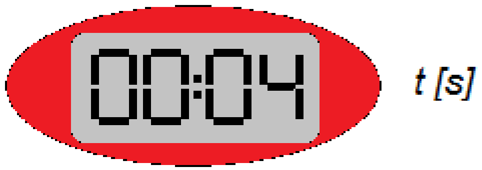


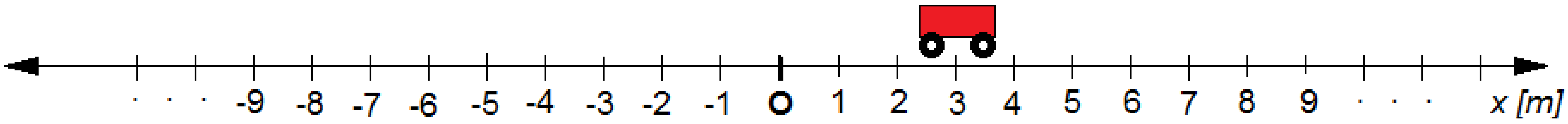


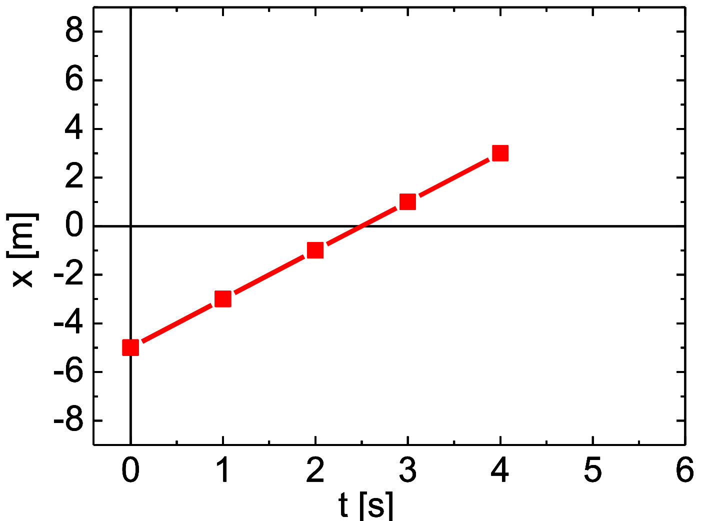


MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 3: El objeto se mueve con velocidad (???) constante







Ecuación

x es una función lineal de t

$$x(t) = Cte_1 + Cte_2 \cdot t$$

Ordenada al Origen

$Cte_1 = x_0$

Pendiente

$Cte_2 = v$ → VELOCIDAD!

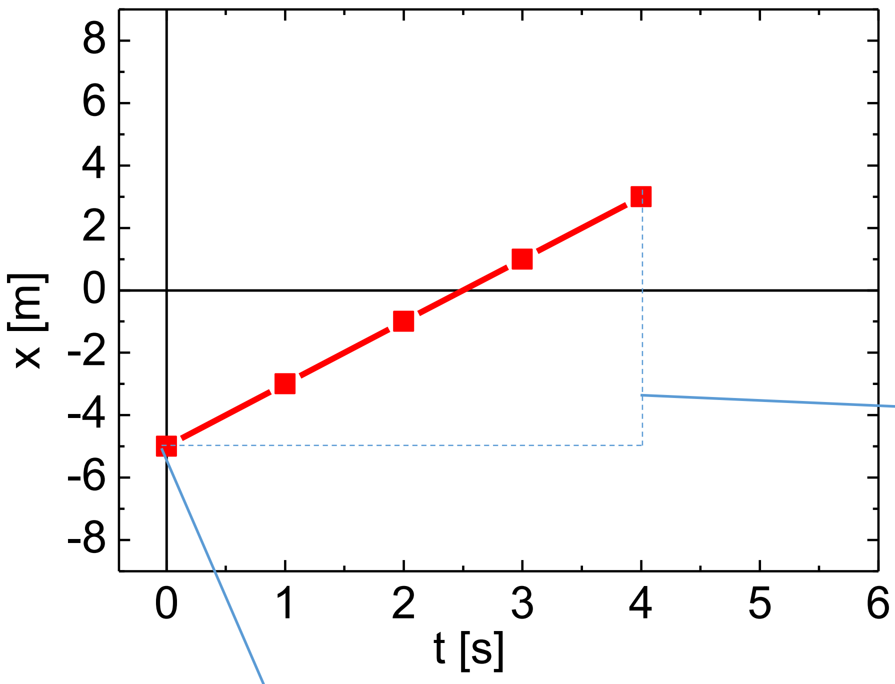
Entonces…

Para un movimiento 1-D con velocidad constante (MRU)

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = x_0 + v \cdot t \\ v = cte. \end{gathered}}$$

MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 3 (continuación): El objeto se mueve con velocidad constante



Para un movimiento 1-D con velocidad constante (MRU)

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$
$$v = cte.$$

v = pendiente de la recta

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

x_0 = posición en el instante inicial

En este caso: x_0 = -5 m

En este caso, sean cuales sean los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2), se obtiene:

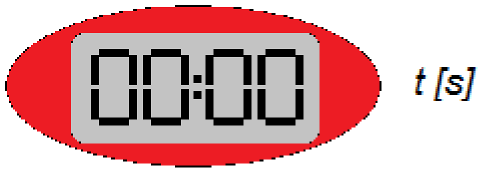
$$v = 2\, m/s$$

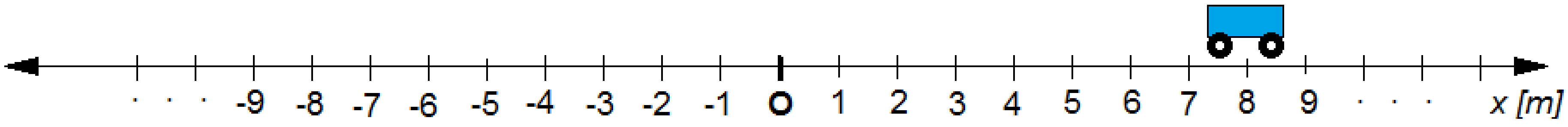
Por consiguiente, la ecuación que describe el movimiento (ecuación horaria) del carro rojo es:

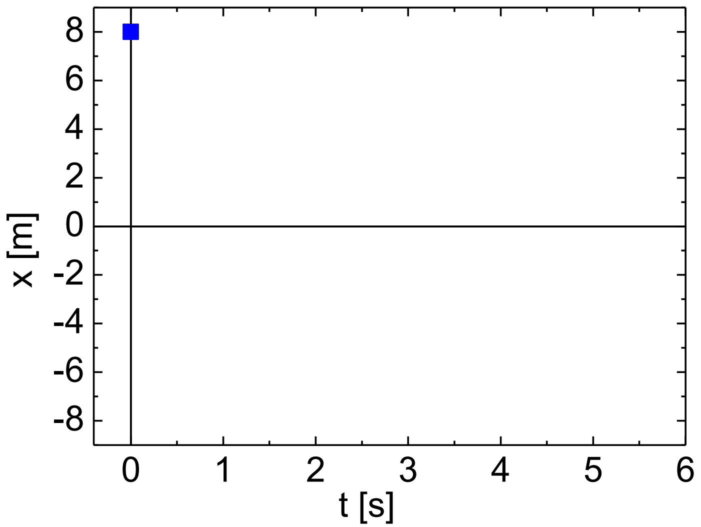
$$x_{carro\, rojo}(t) = -5m + 2\frac{m}{s} \cdot t$$

MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejercicio 1. Hallar la ecuación horaria para el siguiente móvil:

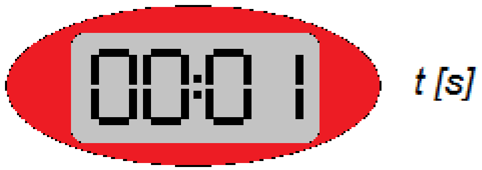


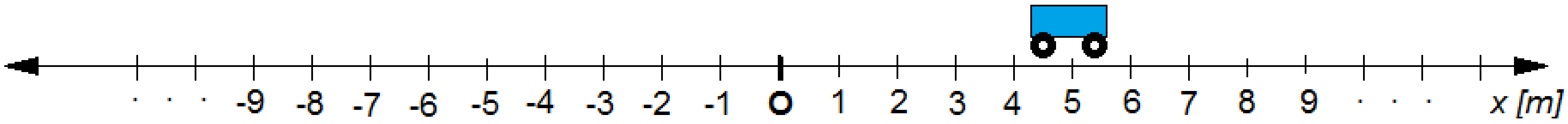


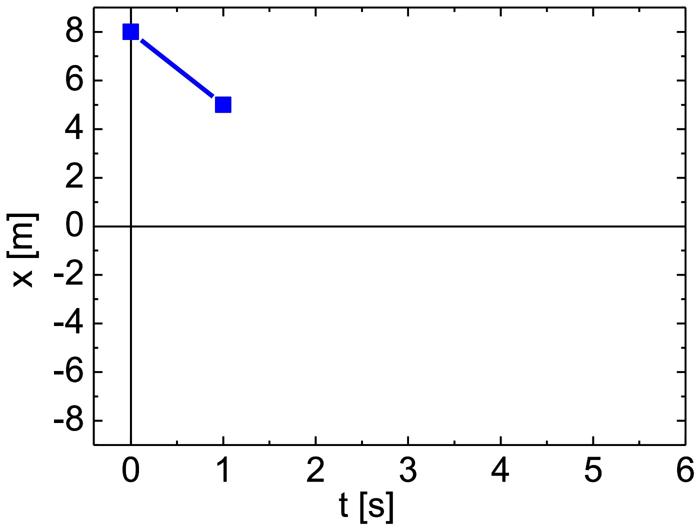


MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejercicio 1. Hallar la ecuación horaria para el siguiente móvil:

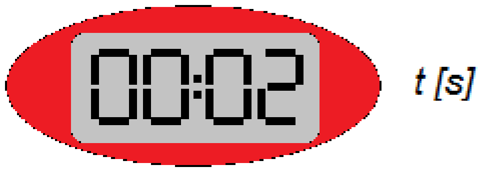


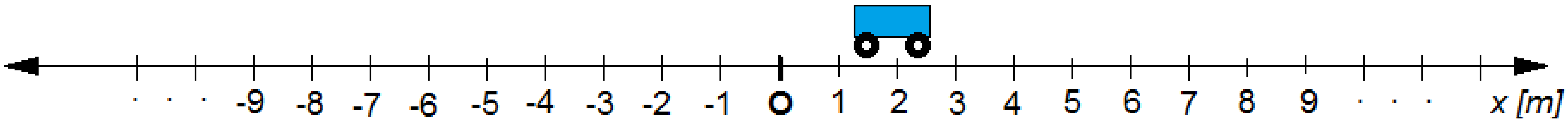


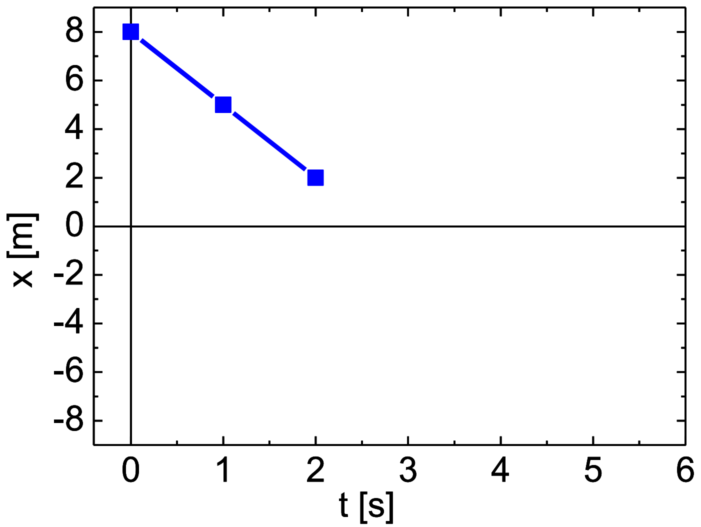


MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejercicio 1. Hallar la ecuación horaria para el siguiente móvil:

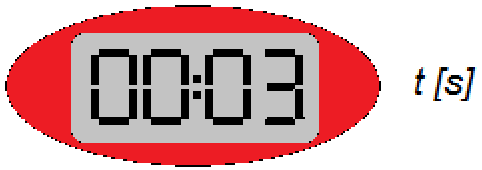


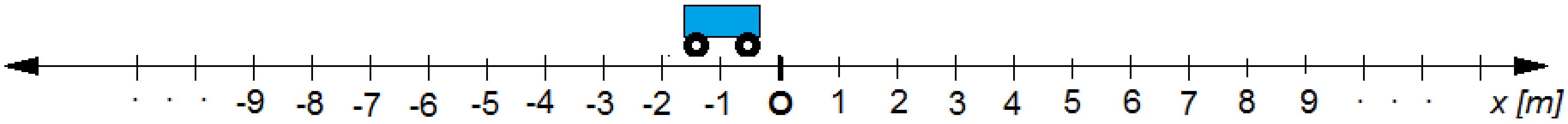


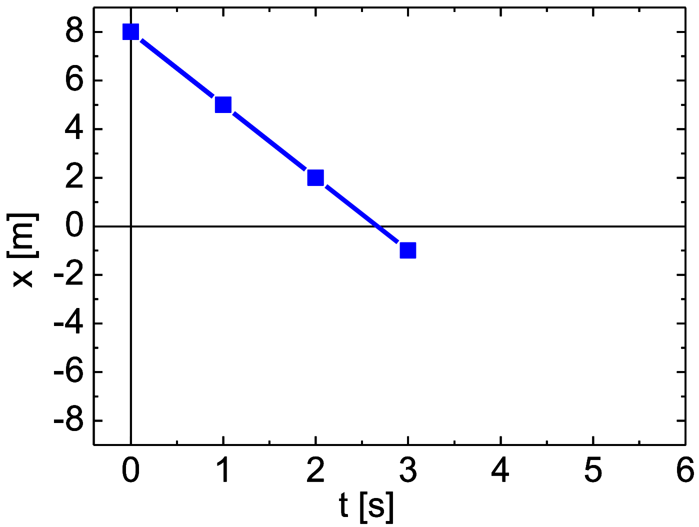


MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejercicio 1. Hallar la ecuación horaria para el siguiente móvil:







Entonces… ¿cuál es la ecuación horaria de este carro?

Como va a velocidad constante, sabemos que la ec. horaria tiene que ser de la forma:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

La respuesta es ….

$$x_{carro\ azul}(t) = 8m - 3\frac{m}{s} \cdot t$$

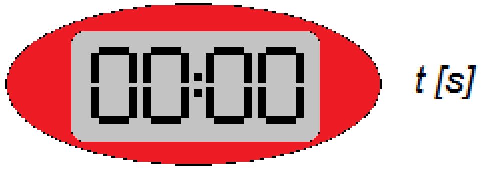
Nótese que la velocidad, en este caso, es negativa

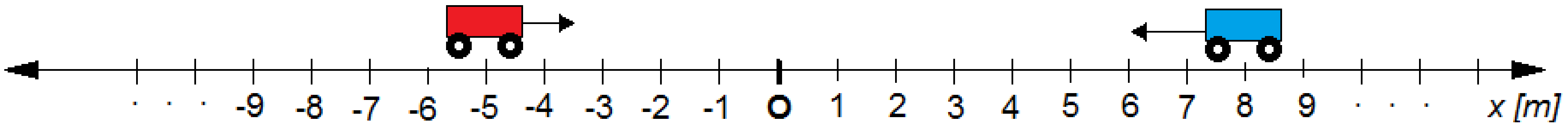
es vectorial

Hacia la derecha es positiva, hacia la izquierda es negativa

MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejercicio 2. <u>Problema de encuentro:</u> Suponiendo que los carros rojo y azul se mueven en el mismo sistema de referencia : ¿dónde y cuándo se encontrarán?





$$x_{carro\,rojo}(t) = -5m + 2\frac{m}{s}\cdot t \qquad x_{carro\,azul}(t) = 8m - 3\frac{m}{s}\cdot t$$

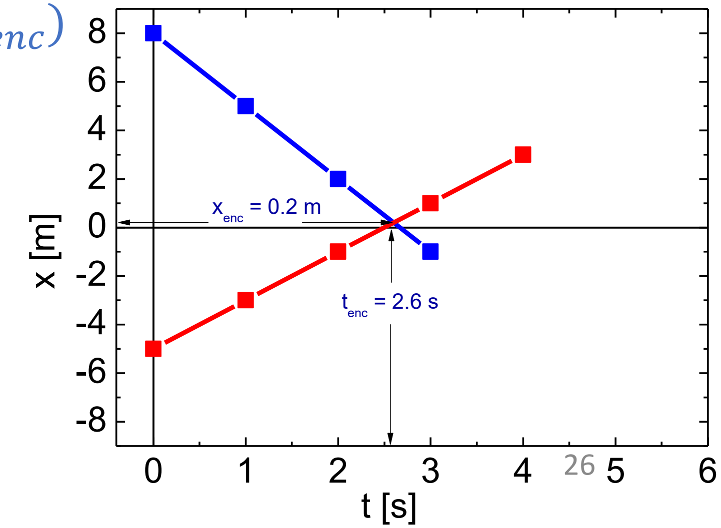
Si $t = t_{enc}$ cuando los carros se encuentran → $x_{carro\,rojo}\,(t_{enc}) = x_{carro\,azul}\,(t_{enc})$

Igualando, se obtiene

$$t_{enc} = 2.6\ s$$

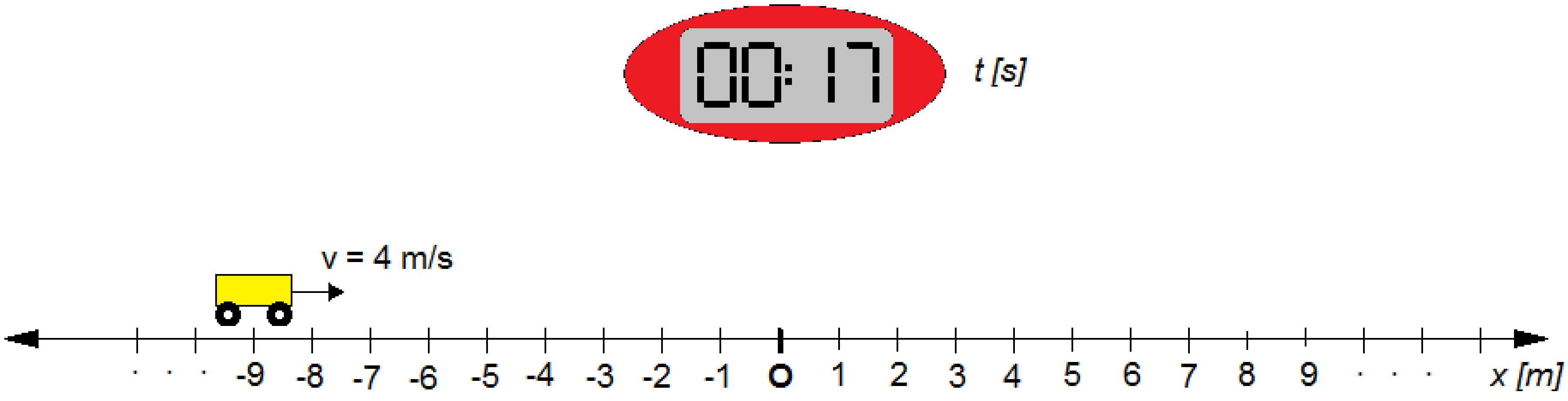
reemplazando…

$$x_{carro\,rojo}\,(2.6\ s) = x_{carro\,azul}\,(2.6\ s) = 0.2\ m$$



MOVIMIENTOS EN 1-D

¿Qué pasa cuando la condición inicial del movimiento no corresponde a $t = 0\ s$?
Veamos esta situación…



Podemos modificar la ecuación horaria y escribirla como

$$\boxed{x(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0)}$$

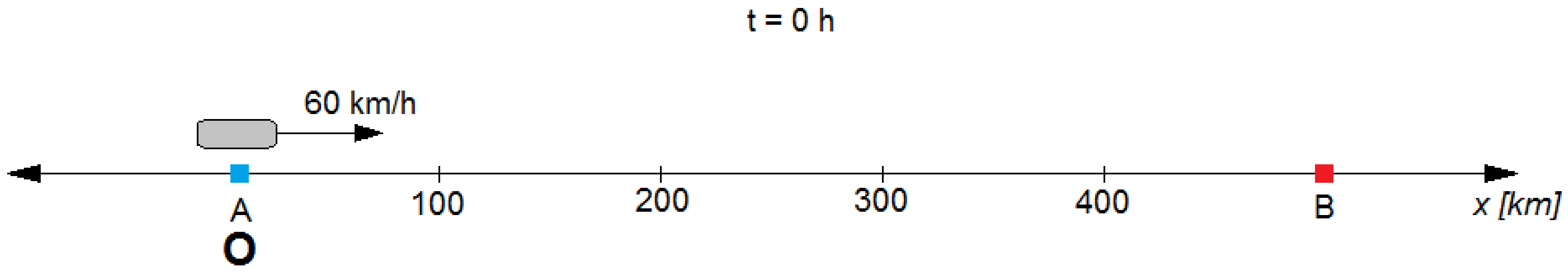
En este caso

$$x_{carro\ amarillo}(t) = -9\ m + 4\frac{m}{s} \cdot (t - 17\ s)$$

Esto puede ser útil en problemas de encuentro en que los móviles no parten simultáneamente, como el que veremos a continuación …

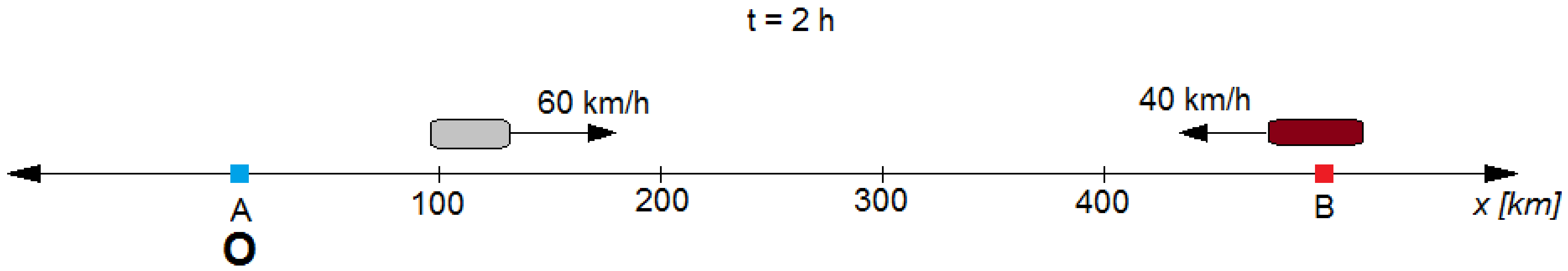
MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 4: Un tren parte desde la ciudad A hacia la B a una velocidad de 60 km/h. Dos horas más tarde parte un tren desde B hacia A con una velocidad de 40 km/h. La distancia entre A y B es de 500 km. ¿En qué momento y a qué distancia de A se encontrarán?



MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 4: Un tren parte desde la ciudad A hacia la B a una velocidad de 60 km/h. Dos horas más tarde parte un tren desde B hacia A con una velocidad de 40 km/h. La distancia entre A y B es de 500 km. ¿En qué momento y a qué distancia de A se encontrarán?



$$x_A(t) = x_{0A} + v_A \cdot (t - t_{0A})$$

$$x_B(t) = x_{0B} + v_B \cdot (t - t_{0B})$$

$$x_A(t) = 0\ km + 60\ \frac{km}{h} \cdot (t - 0\ h)$$

$$x_B(t) = 500\ km - 40\ \frac{km}{h} \cdot (t - 2\ h)$$

Como quiero saber cuándo y dónde se encontrarán … igualo

Rtas: $t_{enc} = 5.8\ \mathrm{h}$; $x_{enc} = 348\ \mathrm{km}$

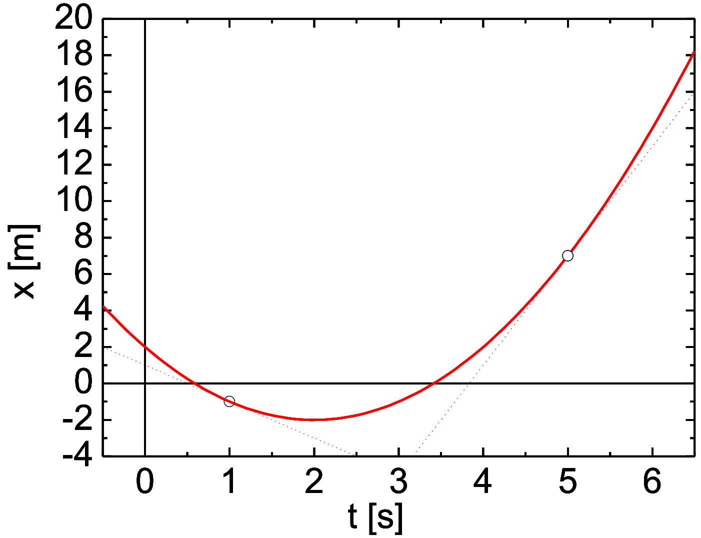
MOVIMIENTOS EN 1-D

¿Qué pasa si la velocidad **no** es constante?

Ya no podremos decir, como antes, que: $\boxed{v = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$

¿Por qué? Porque la curva $x = x(t)$ ya no será una recta

Por ejemplo:



¿Cómo definimos la velocidad? Debemos realizar el paso al límite:

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}$$

→ Recordar que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto

Ejemplo 5: Considere que la posición de una partícula varía con el tiempo según la ecuación horaria

$$x(t) = 2\,m\ - 4\ \frac{m}{s}\cdot t + 1\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

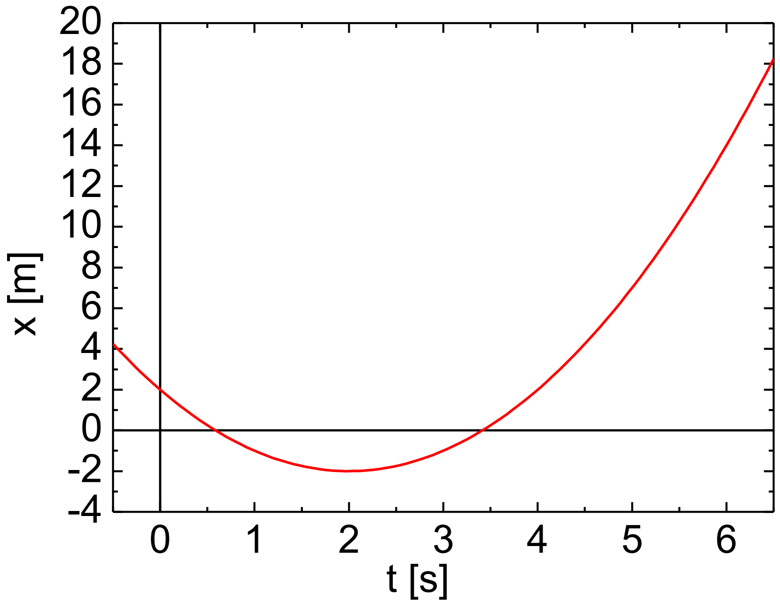
(a) Halle una expresión para la velocidad en función del tiempo $v(t)$

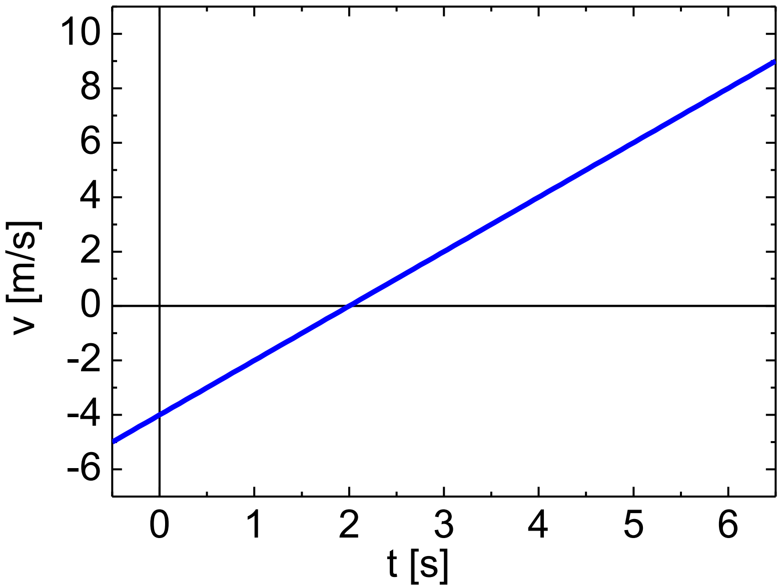
Rta: $v = \frac{dx}{dt} = -4\ \frac{m}{s} + 2\,\frac{m}{s^2}\cdot t$

(b) Calcule la velocidad cuando $t = 1\ s$ y cuando $t = 5\ s$

Rtas: $v(1\ s) = -4\ \frac{m}{s} + 2\,\frac{m}{s^2}\cdot 1\ s = -2\ \frac{m}{s}$ $v(5\ s) = -4\ \frac{m}{s} + 2\,\frac{m}{s^2}\cdot 5\ s = 6\ \frac{m}{s}$

(c) Grafique $x(t)$ y $v(t)$





MOVIMIENTOS EN 1-D: ACELERACIÓN

Cuando la velocidad **no** es constante (es decir, aumenta o disminuye con el tiempo), adquiere importancia otro concepto: la aceleración …

que indica la variación de la velocidad por unidad de tiempo:

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt}}$$

Nótese que, de acuerdo con la definición anterior, y recordando que $\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$

Entonces: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$

Pregunta: ¿En qué unidades se mide la aceleración?

Rta: En m/s^2

Pregunta: ¿Cuánto vale la aceleración para el móvil del **Ejemplo 5**?

Rta: Era $x(t) = 2\,m \; - 4\,\frac{m}{s} \cdot t + 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = -4\,\frac{m}{s} + 2\frac{m}{s^2} \cdot t \rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 2\,\frac{m}{s^2}$

Pregunta: ¿Cuánto vale la aceleración para un móvil que se mueve con velocidad constante?

Rta: 0

MOVIMIENTOS EN 1-D: **Recordar…**

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt}}$$

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt}}$$

Para pensar… ¿cómo serán las relaciones inversas?

Pregunta 1: Si $a = cte \neq 0$, ¿cómo varía la velocidad?

Rta: La velocidad será una función lineal del tiempo.

¿Por qué?

Porque si $a(t) = \frac{dv}{dt}$ → $v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t) \cdot dt$

Pero si $a(t) = cte. = a$ → $v(t) = \int_{t_0}^{t} a \cdot dt = a \cdot t + v_0$

Pregunta 2: ¿y cómo varía la posición?

Rta: La posición será una función cuadrática del tiempo.

¿Por qué?

Porque si $v(t) = \frac{dx}{dt}$ → $x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt$

Pero si $v(t) = a \cdot t + v_0$ → $x(t) = \int_{t_0}^{t} (a \cdot t + v_0) \cdot dt = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$

MOVIMIENTOS EN 1-D: **Movimientos con aceleración constante (≠ 0)**

En un movimiento con aceleración constante, tanto la posición como la velocidad varían con el tiempo, y lo hacen de acuerdo con las siguientes ecuaciones horarias:

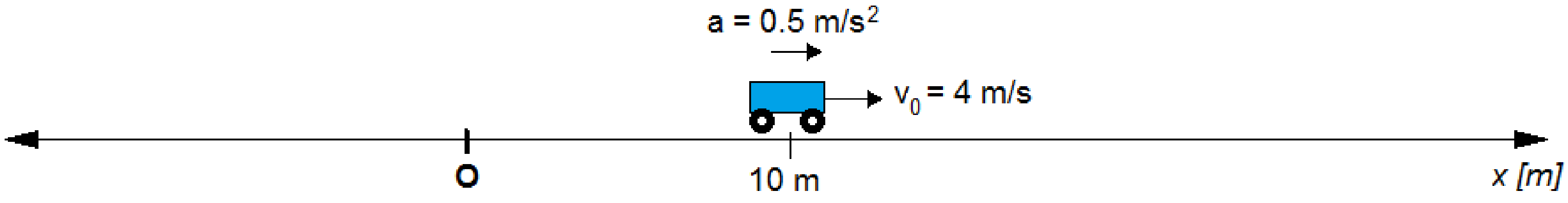
$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot t}$$

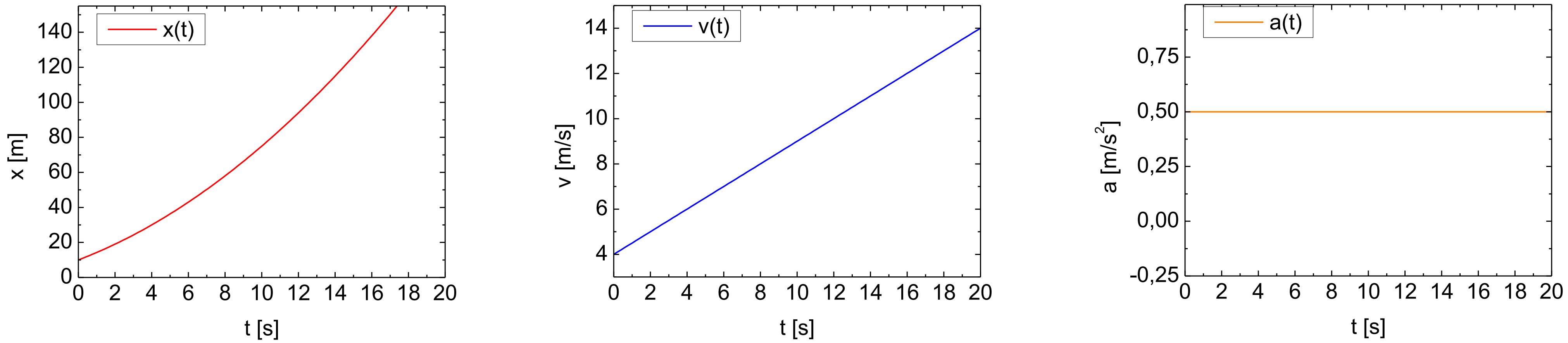
Ecuaciones de movimiento para el MRUV
(movimiento rectilíneo uniformemente variado)

MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejemplo 6: Un móvil parte desde un punto ubicado 10 m a la derecha del origen de coordenadas, con una velocidad inicial de 4 m/s hacia la derecha y una aceleración constante de 0.5 m/s², también hacia la derecha (**Figura**). **(a)** Dar las ecuaciones para $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ y graficar **(b)** Indicar posición, velocidad y aceleración a los 5 s.

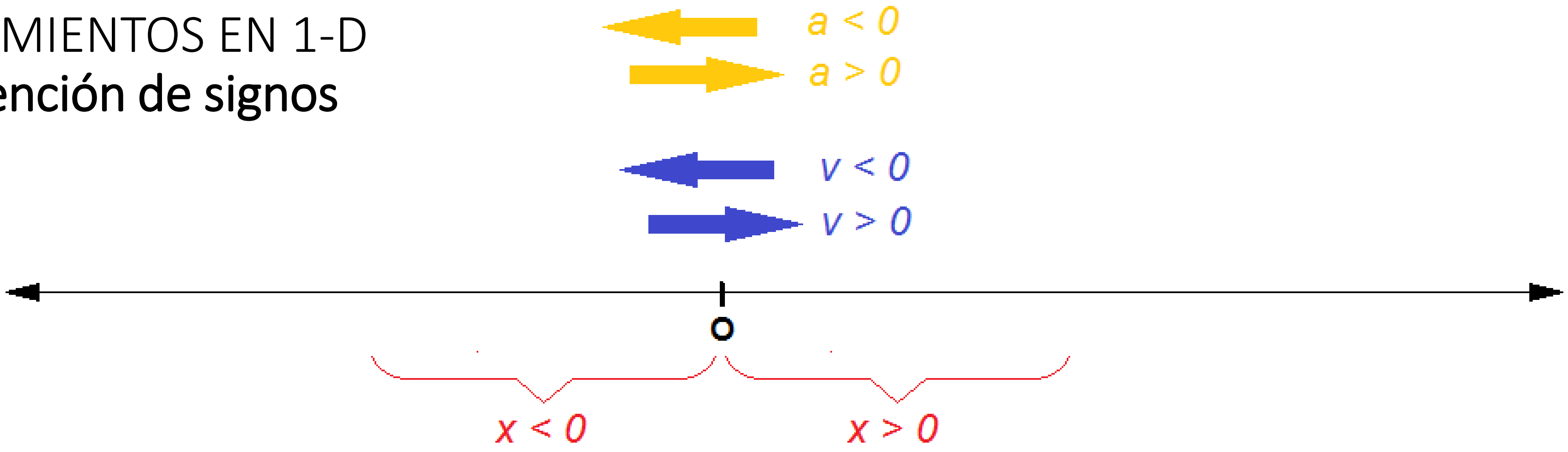


Rtas: (a) $x(t) = 10\,m + 4\,\frac{m}{s}\cdot t + 0.25\frac{m}{s^2}\cdot t^2$; $v(t) = 4\,\frac{m}{s} + 0.5\frac{m}{s^2}\cdot t$; $a(t) = 0.5\,\frac{m}{s^2}$

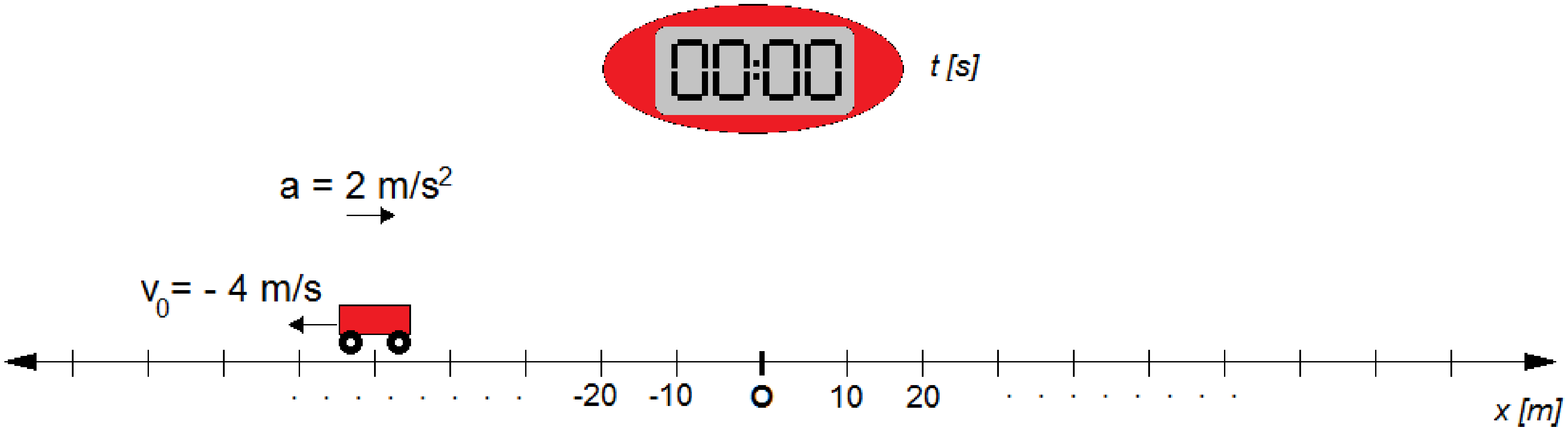


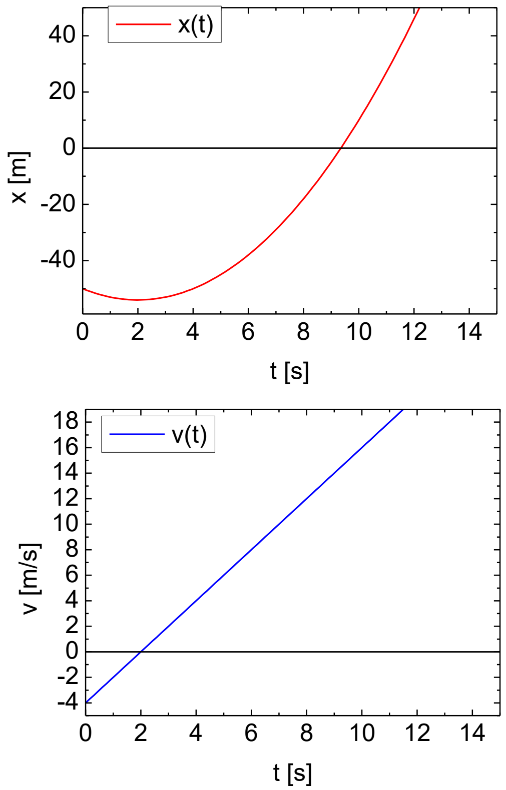
(b) $x(5s) = 36.25\,m$; $v(5s) = 6.5\,\frac{m}{s}$; $a(5s) = 0.5\,\frac{m}{s^2}$

Convención de signos



Ejemplo 7: Dar las ecuaciones $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ para la situación mostrada en la Figura:





Rtas: $x(t) = -50\,m - 4\,\frac{m}{s} \cdot t + 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2$; $v(t) = -4\,\frac{m}{s} + 2\frac{m}{s^2} \cdot t$; $a(t) = 2\,\frac{m}{s^2}$

MOVIMIENTOS EN 1-D

Ejercicio 4

Para la situación planteada en el **Ejemplo 7** (página anterior), responda:

(a) Posición, velocidad y aceleración cuando $t = 1s$

Rtas: $x(1s) = -53\ m$; $v(1s) = -2\ \frac{m}{s}$; $a(1s) = 2\frac{m}{s^2}$

(b) Posición, velocidad y aceleración cuando $t = 5s$

Rtas: $x(5s) = -45\ m$; $v(5s) = 6\ \frac{m}{s}$; $a(5s) = 2\frac{m}{s^2}$

(c) ¿En qué momento(s) pasa el móvil por el origen de coordenadas? ¿Qué velocidad tiene en ese instante?

Rtas: Cuando el móvil pasa por el origen, $x(t) = -50\ m - 4\ \frac{m}{s} \cdot t + 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2 = 0$

Hay que resolver la cuadrática, y se obtienen dos soluciones, $t_1 \approx 9.35\ s$ y $t_2 \approx -5.35\ s.$

La solución t_2 no tiene sentido físico en este problema, así que tomamos la solución t_1.

La velocidad en ese instante es $v(t_1) = v(9.35\ s) = 14.7\ m/s$

(d) ¿En qué momento se detiene el móvil? ¿En qué lugar está cuando se detiene?

Rtas: Cuando el móvil se detiene, $v(t) = -4\ \frac{m}{s} + 2\frac{m}{s^2} \cdot t = 0$

Se resuelve la ecuación y se obtiene $t \approx 2\ s.$

La posición en ese instante es $x(t) = x(2\ s) = -54\ m$

MOVIMIENTOS EN 1-D

¿Qué pasa cuando la condición inicial del movimiento no corresponde a $t = 0\ s$?

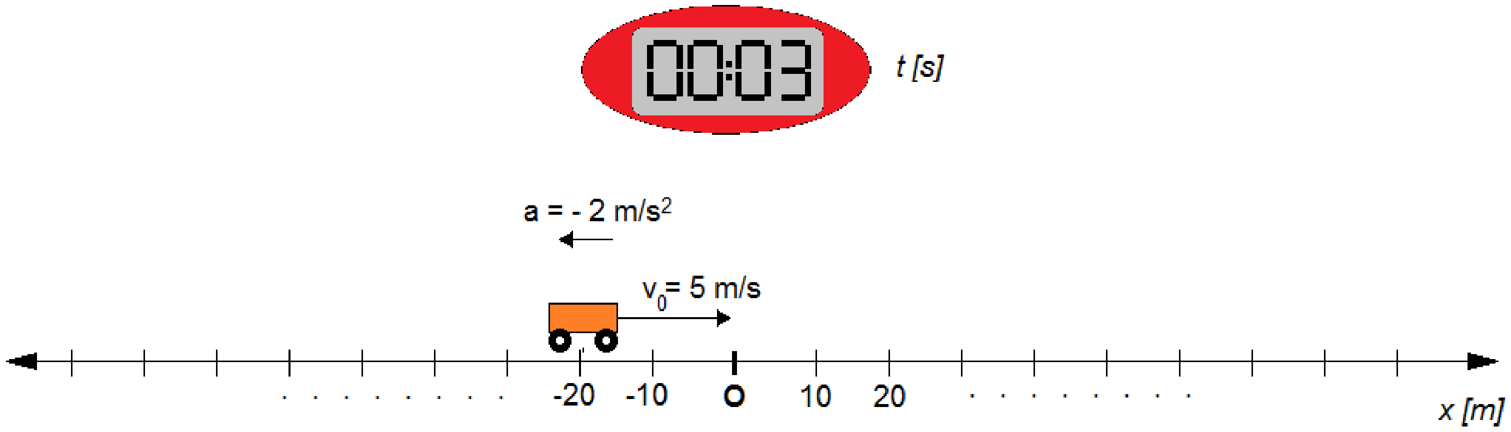
Rta: Como se mencionó anteriormente (página 12), deberemos reemplazar, en todas las ecuaciones, t por $t - t_0$, siendo t_0 el momento en que comienza el movimiento.

Las ecuaciones horarias quedan...

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2}$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)}$$

Ejemplo 8. Si la situación inicial de un móvil que describe un MRUV es la que se muestra en la Figura:



Entonces sus ecuaciones horarias serán

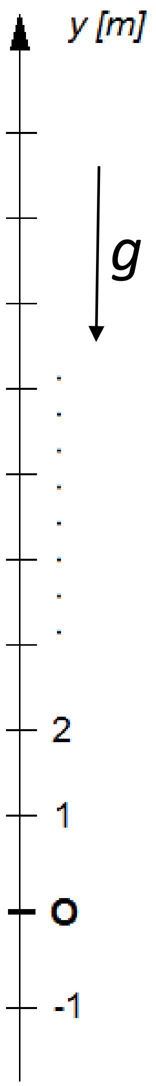
$$x(t) = -20\ m + 5\ \frac{m}{s} \cdot (t - 3\ s) - 1\ \frac{m}{s^2}(t - 3\ s)^2$$

$$v(t) = 5\ \frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot (t - 3s)$$

Ejercicio 5. Verificar la ecuación para $v(t)$ derivando $x(t)$**.**

MOVIMIENTOS EN 1-D

Movimientos en dirección vertical:



En principio, las ecuaciones de movimiento serán como las que hemos visto, excepto que reemplazaremos la x por y

La velocidad y la aceleración serán vectores dirigidos en la dirección del eje y

En la mayoría de las situaciones de interés, la única aceleración existente será la *aceleración gravitatoria*, g

Para un cuerpo moviéndose cerca de la superficie terrestre, $g = 9.8\, m/s^2$, dirigida hacia el centro de la Tierra

Si consideramos que y crece hacia "arriba", el término conteniendo la aceleración gravitatoria debe aparecer con signo negativo.

Las ecuaciones de movimiento quedan:

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}$$

$$\boxed{v(t) = v_0 - g \cdot t}$$

Ecuaciones para caída libre y tiro vertical.

MOVIMIENTOS EN 1-D – Caída libre

Ejemplo 8. Se deja caer un piano desde una altura de 15 m. Calcular con qué velocidad llegará al suelo.

Rta:

Dado que el piano *se deja caer*, su velocidad inicial será 0 → $v_0 = 0$

Tomando el origen del eje a nivel del suelo, será $y_0 = 15\,m$

Las ecuaciones de movimiento quedarán:

$$y(t) = 15m - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$
$$v(t) = -g \cdot t$$

$(g = 9.8\,m/s^2)$

Cuando el piano llegue al suelo, será $y(t) = 0$ → $15m - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0$

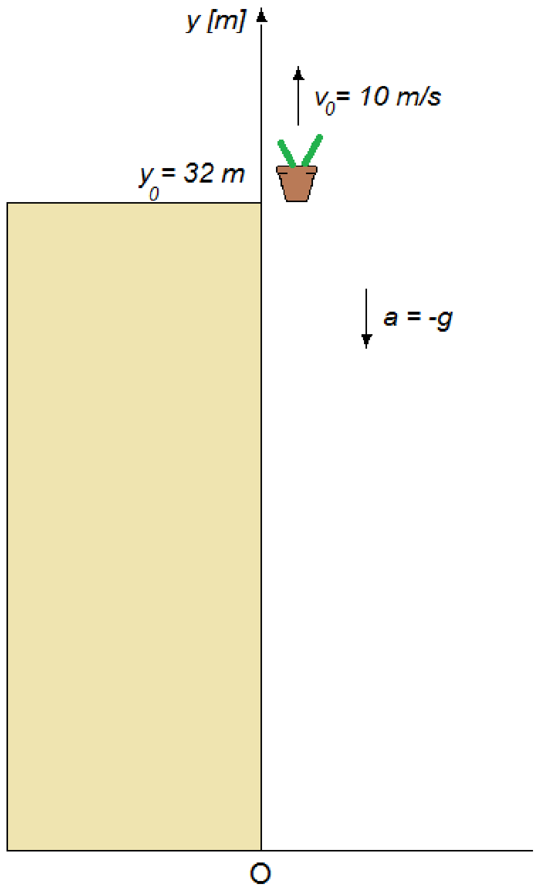
Resolviendo, se obtiene $t_1 = 1.75\,s$, $t_2 = -1.75\,s$ (pero la segunda solución no tiene significado físico)

Reemplazando en la ecuación para la velocidad, se obtiene $v(1.75\,s) = -17.15\,m/s$.

El hecho de que la velocidad final tenga signo negativo se debe a que, justo antes de chocar contra el suelo, la velocidad estaba dirigida en el sentido negativo del eje y.

Ejemplo 9. Desde la terraza de un edificio, de 32 m de altura, se arroja verticalmente hacia arriba una maceta con una velocidad de 10 m/s. Determinar: (a) ¿Con qué velocidad llegará al suelo? (b) ¿Cuál será la altura máxima?

Rta:
Hagamos un esquema:



Las ecuaciones de movimiento serán: $y(t) = 32\,m + 10\,\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$$v(t) = 10\,\frac{m}{s} - g \cdot t$$

(a) Cuando llegue al suelo será $y(t) = 0 \rightarrow 32\,m + 10\,\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0$

Resolviendo la cuadrática se obtienen $t_1 = -1.73\,s$, $t_2 = 3.77\,s$

Reemplazando con t_2 se obtiene $v(t_2) = -26.95\,\frac{m}{s}$

(b) En el punto más alto será $v(t) = 0 \rightarrow 10\,\frac{m}{s} - g \cdot t = 0$

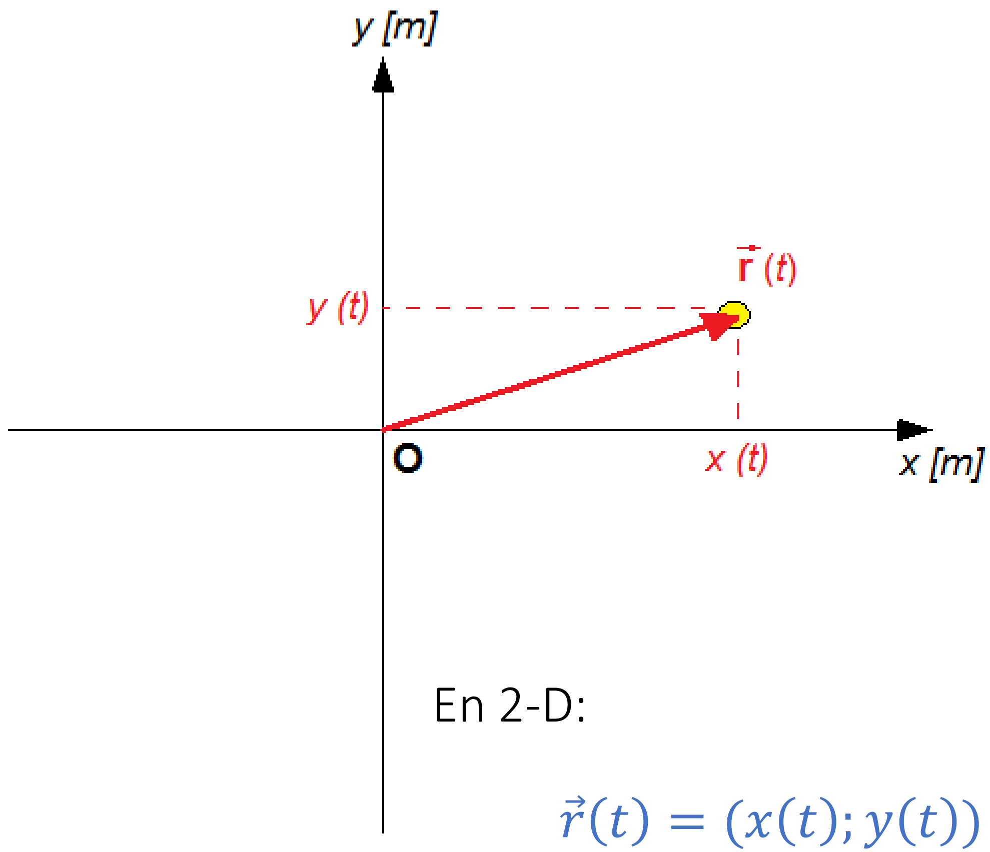
Resolviendo la ecuación se obtiene $t = 1.02\,s$

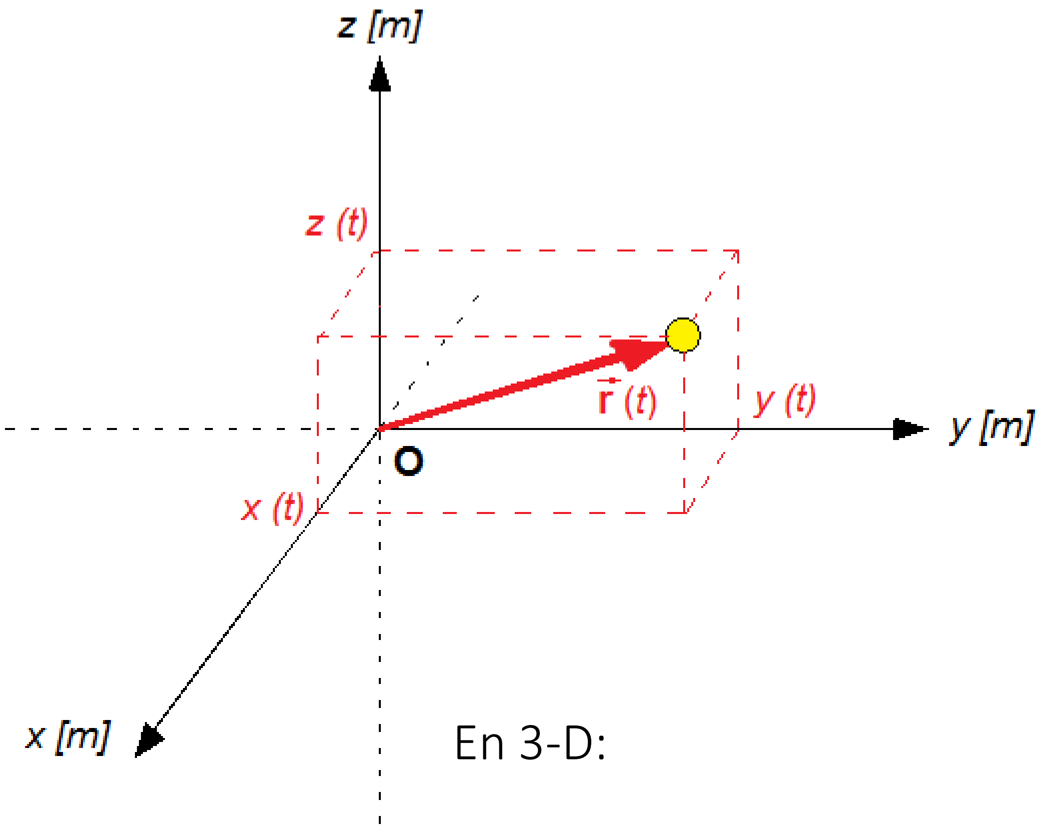
Reemplazando en la ecuación para $y(t)$ se obtiene

$$y(1.02\,s) = y_{max} = 37.1\,m$$

MOVIMIENTO EN 2 y 3 DIMENSIONES

La posición de un cuerpo queda determinada mediante dos o tres coordenadas:





En 2-D:

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t))$$

o

$$\vec{r}(t) = x(t)\breve{\imath} + y(t)\breve{\jmath}$$

En 3-D:

$$\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$$

o

$$\vec{r}(t) = x(t)\breve{\imath} + y(t)\breve{\jmath} + z(t)\breve{k}$$

MOVIMIENTO EN 2 y 3 DIMENSIONES - Velocidad

Así como para el movimiento 1-D a lo largo del eje x era:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Para el movimiento en 2-D es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}\right) = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}\breve{\imath} + \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}\breve{\jmath} = \left(v_x; v_y\right) = v_x\breve{\imath} + v_y\breve{\jmath}$$

Y en 3-D :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\breve{\imath} + \frac{dy}{dt}\breve{\jmath} + \frac{dz}{dt}\breve{k} = \left(v_x; v_y; v_z\right) = v_x\breve{\imath} + v_y\breve{\jmath} + v_z\breve{k}$$

De la misma forma en que describimos la posición según sus componentes $(x; y)$ o $(x; y; z)$, también debemos describir la velocidad de acuerdo con sus componentes $(v_x; v_y)$ o $(v_x; v_y; v_z)$

MOVIMIENTO EN 2 y 3 DIMENSIONES - Aceleración

Así como para el movimiento 1-D es:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Para el movimiento en 2-D es

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}; \frac{dv_y}{dt}\right) = \frac{dv_x}{dt}\breve{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\breve{\jmath} = \left(a_x; a_y\right) = a_x\breve{\imath} + a_y\breve{\jmath}$$

Y en 3-D :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}; \frac{dv_y}{dt}; \frac{dv_z}{dt}\right) = \frac{dv_x}{dt}\breve{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\breve{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\breve{k} = \left(a_x; a_y; a_z\right) = a_x\breve{\imath} + a_y\breve{\jmath} + a_z\breve{k}$$

De la misma forma en que describimos la posición según sus componentes $(x; y)$ o $(x; y; z)$, también debemos describir la velocidad de acuerdo con sus componentes $(a_x; a_y)$ o $(a_x; a_y; a_z)$

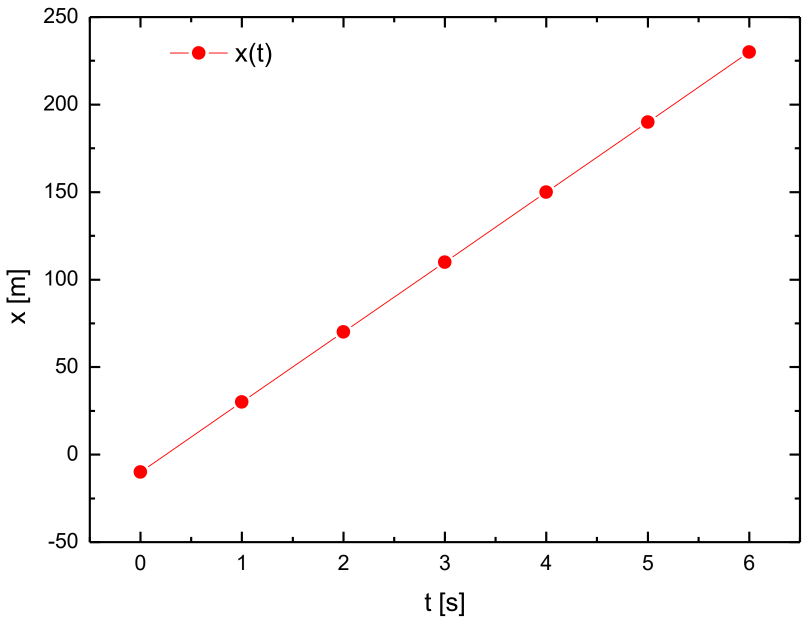
MOVIMIENTOS EN 2 y 3-D:

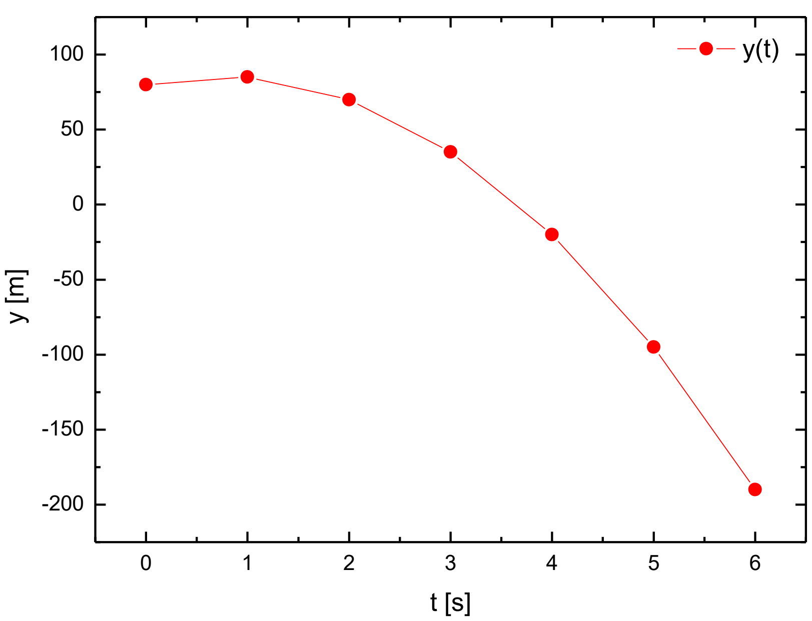
Ejemplo 10. El vector posición de un cuerpo varía con el tiempo de acuerdo con la expresión: $\vec{r}(t) = \left(-10m + 40\frac{m}{s} \cdot t; 80m + 15\frac{m}{s} \cdot t - 10\frac{m}{s^2} \cdot t^2\right)$.

(a) Graficar $x(t)$, $y(t)$

Rta: Hagamos una tabla

t [s]	x [m]	y [m]
0	-10	80
1	30	85
2	70	70
3	110	35
4	150	-20
5	190	-95
6	230	-190





MOVIMIENTOS EN 2 y 3-D:

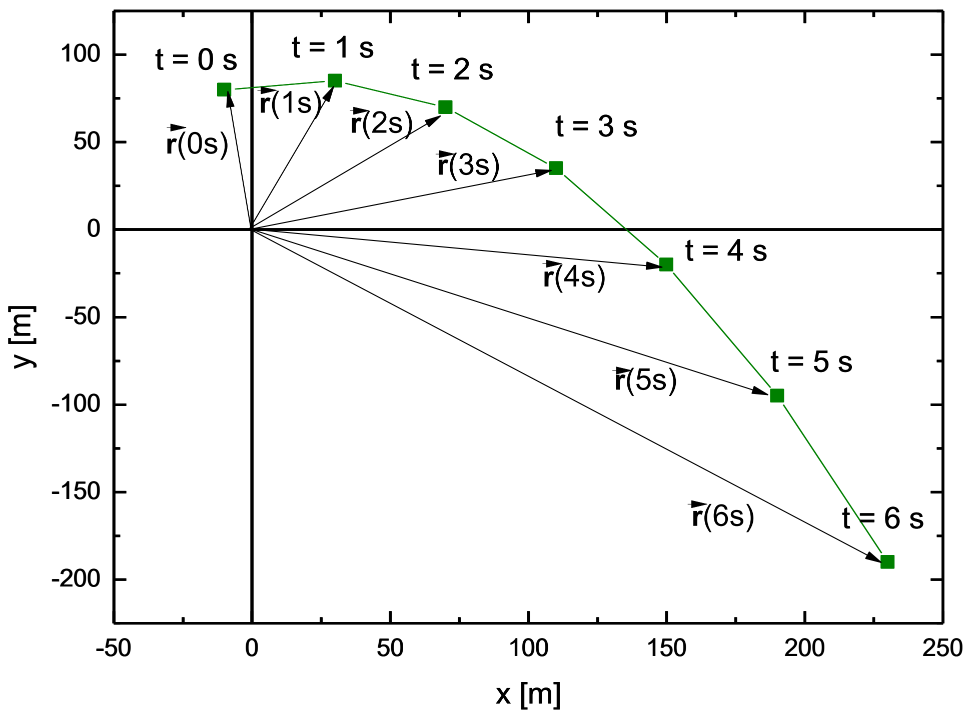
Ejemplo 10 (continuación). El vector posición de un cuerpo varía con el tiempo de acuerdo con la expresión: $\vec{r}(t) = \left(-10m + 40\frac{m}{s} \cdot t;\ \ 80m + 15\frac{m}{s} \cdot t - 10\frac{m}{s^2} \cdot t^2\right)$.

(b) Graficar la *trayectoria* del cuerpo

Rta: *Trayectoria:* Lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento

Usando la misma tabla

t [s]	x [m]	y [m]
0	-10	80
1	30	85
2	70	70
3	110	35
4	150	-20
5	190	-95
6	230	-190



MOVIMIENTOS EN 2 y 3-D:

Ejemplo 10 (continuación). El vector posición de un cuerpo varía con el tiempo de acuerdo con la expresión: $\vec{r}(t) = \left(-10m + 40\frac{m}{s}\cdot t; 80m + 15\frac{m}{s}\cdot t - 10\frac{m}{s^2}\cdot t^2\right)$.

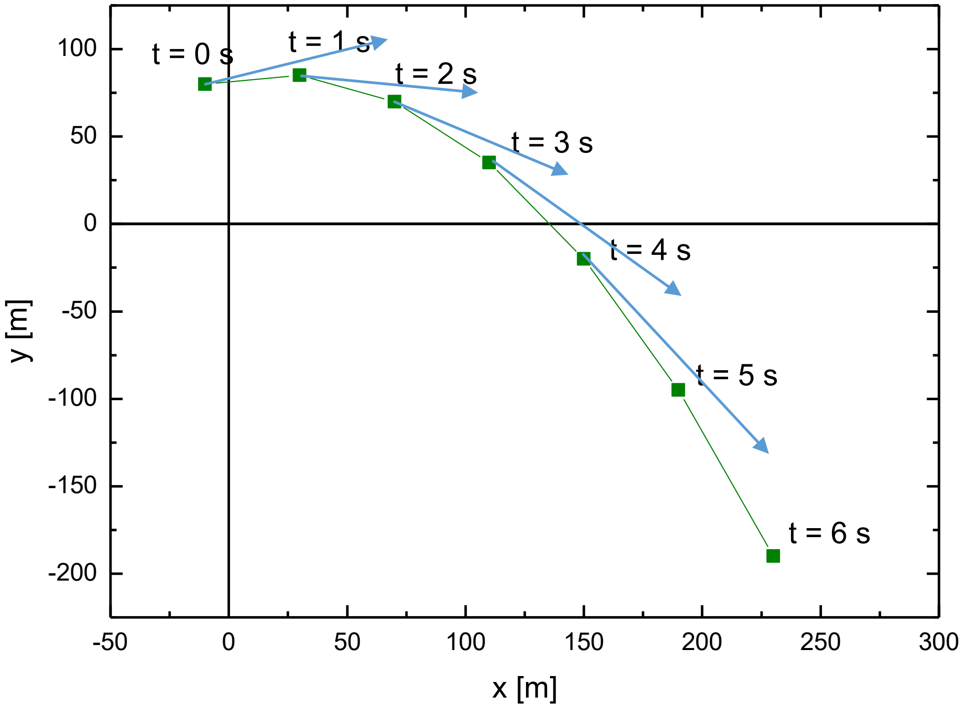
(c) Calcular la velocidad en los primeros instantes y graficar los vectores $\vec{v}$ sobre la trayectoria

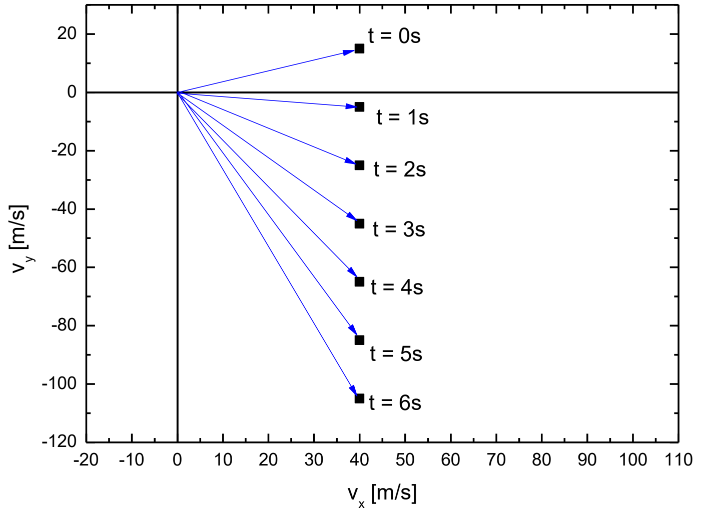
Rta:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\rightarrow \quad \vec{v}(t) = \left(40\frac{m}{s}; 15\frac{m}{s} - 20\frac{m}{s^2}t\right)$$

t [s]	v_x [m/s]	v_y [m/s]
0	40	15
1	40	-5
2	40	-25
3	40	-45
4	40	-65
5	40	-85
6	40	-105





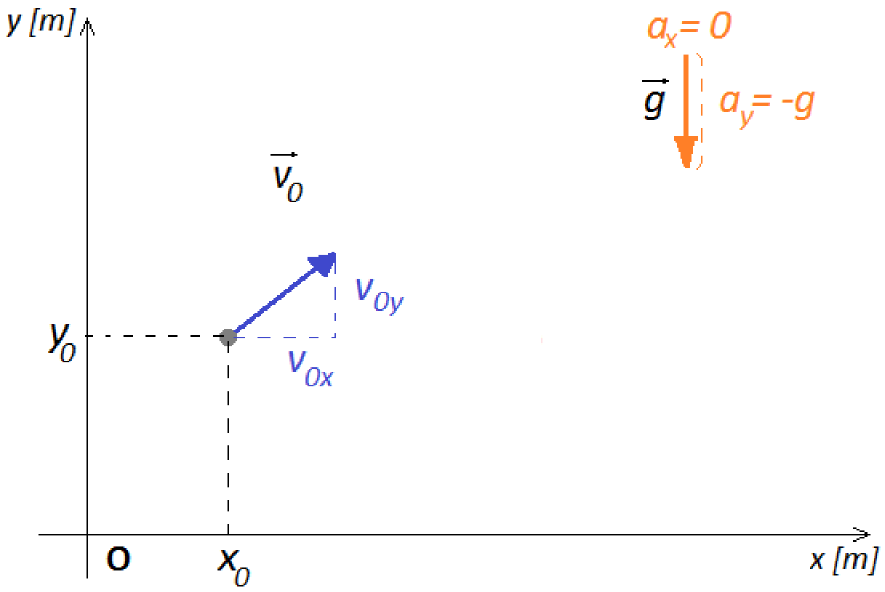
El vector velocidad es tangente a la trayectoria

MOVIMIENTO EN 2 y 3 DIMENSIONES – Tiro Oblicuo

Consideremos el caso de un objeto lanzado en el campo gravitatorio $\vec{g}$ con velocidad inicial arbitraria $\vec{v}_0$

La trayectoria descrita por el objeto será una trayectoria 2-D, en el plano formado por los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{g}$

Siempre podremos elegir un plano xy de forma que el movimiento del objeto quede contenido en el plano



Si la única aceleración es la debida a la gravedad,
$a_x = 0; \quad a_y = -g$

Las ecuaciones horarias serán:

- En el eje x:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$$

- En el eje y:

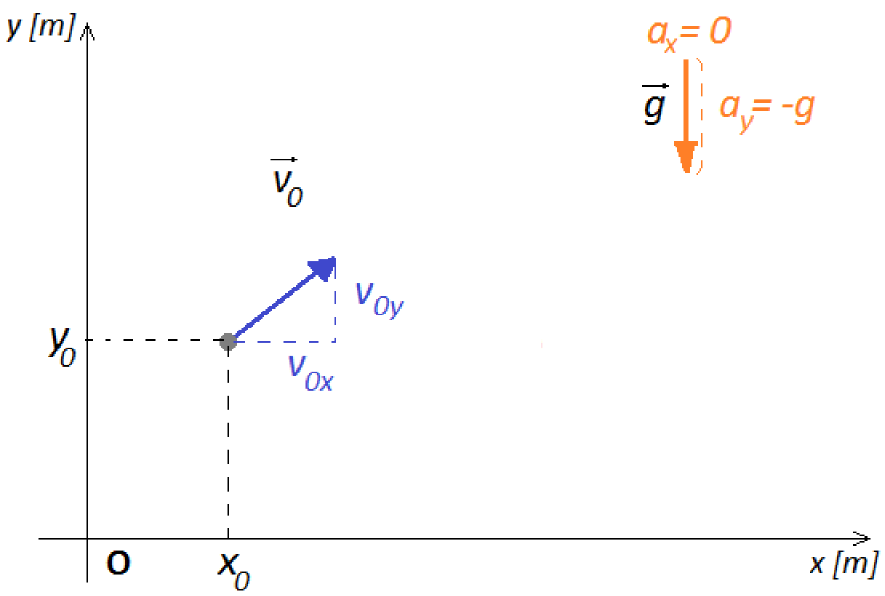
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$
$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t$$

MOVIMIENTO EN 2 y 3 DIMENSIONES – Tiro Oblicuo

Consideremos el caso de un objeto lanzado en el campo gravitatorio $\vec{g}$ con velocidad inicial arbitraria $\vec{v}_0$

La trayectoria descrita por el objeto será una trayectoria 2-D, en el plano formado por los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{g}$

Siempre podremos elegir un plano xy de forma que el movimiento del objeto quede contenido en el plano



Si la única aceleración es la debida a la gravedad,
$a_x = 0; \quad a_y = -g$

Reemplazando con las componentes de la aceleración, quedan:

- En el eje x:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$
$$v_x(t) = v_{0x}$$

MRU

- En el eje y:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

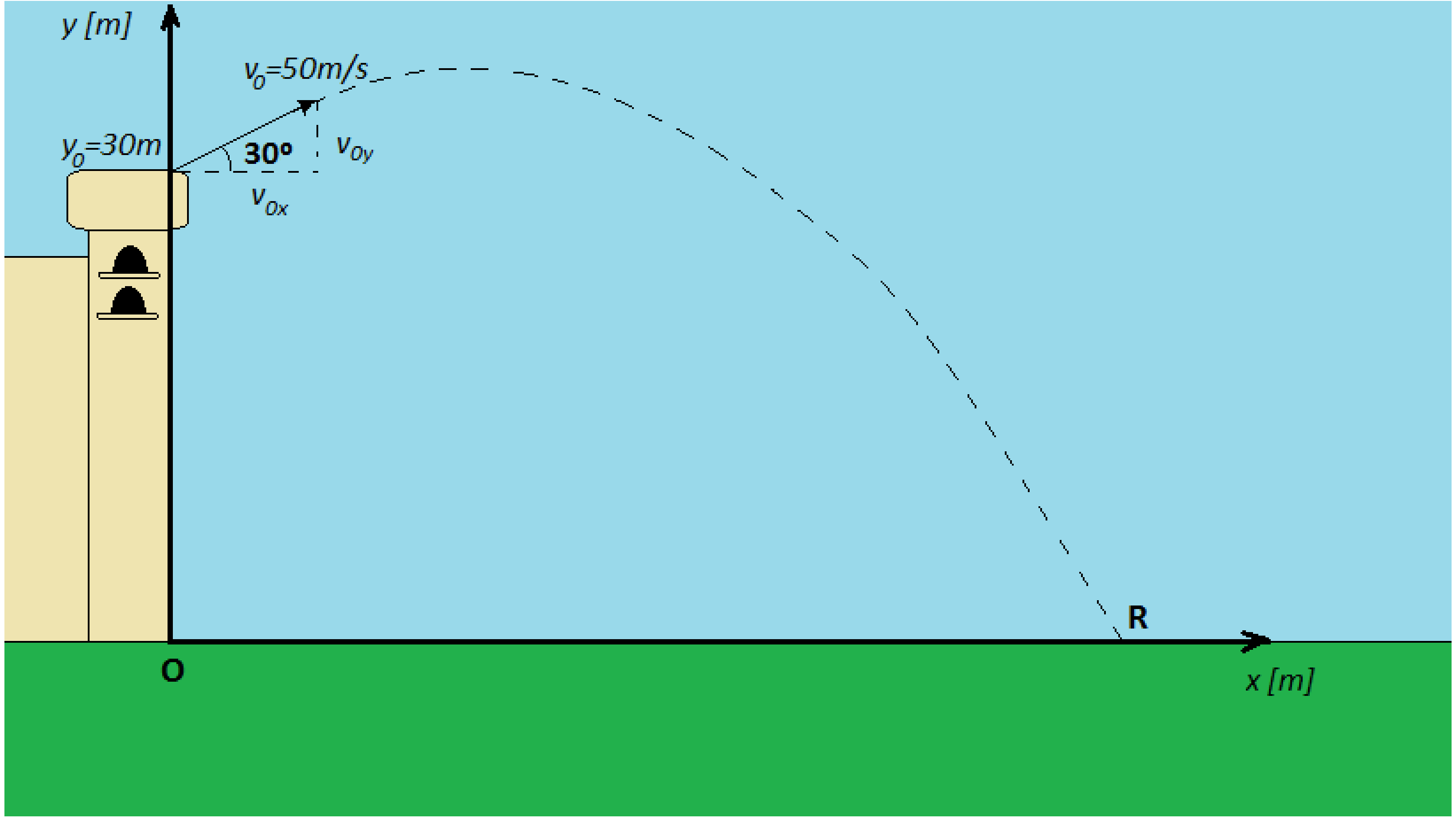
MRUV

MOVIMIENTO EN 2 y 3 DIMENSIONES – Tiro Oblicuo

Ejemplo 11. Desde la torre de un castillo, a 30 m de altura, se lanza una flecha con una velocidad inicial de 50 m/s formando un ángulo α=30º sobre la horizontal. Hallar el alcance R de la flecha.

Rta:

Hagamos un esquema:



Para hallar las componentes de la velocidad inicial, usamos trigonometría:

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\ \alpha$$

$$v_{0x} = 50\ \frac{m}{s} \cdot cos\ 30º$$

$$v_{0x} = 43.3\ \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen\ \alpha$$

$$v_{0y} = 50\ \frac{m}{s} \cdot sen\ 30º$$

$$v_{0y} = 25\ \frac{m}{s}$$

Además:

$$x_0 = 0 \qquad a_x = 0$$

$$y_0 = 30\ m \qquad a_y = -g = -9.8\ \frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 11 (continuación). Desde la torre de un castillo, a 30 m de altura, se lanza una flecha con una velocidad inicial de 50 m/s formando un ángulo α=30º sobre la horizontal. Hallar el alcance R de la flecha.

Rta:

Las ecuaciones de movimiento quedarán:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \qquad v_y(t) = v_{0y} + a_y t$$

Reemplazando con los datos del problema:

$$x(t) = 43.3\ \frac{m}{s}t \qquad y(t) = 30m + 25\frac{m}{s}t - 4.9\frac{m}{s^2}t^2$$

$$v_x(t) = 43.3\ \frac{m}{s} \qquad v_y(t) = 25\frac{m}{s} - 9.8\frac{m}{s^2}t$$

Para calcular el alcance, primero debo determinar en qué instante llega al suelo, $y(t) = 0$

$$y(t) = 0 \Rightarrow 30m + 25\frac{m}{s}t - 4.9\frac{m}{s^2}t^2 = 0 \rightarrow \cancel{t_1 = -1.00\ s}, \quad t_2 = 6.11\ s$$

$$R = x(6.11\ s) = 43.3\frac{m}{s} \cdot 6.11\ s = \mathbf{264.56\ m}$$

MOVIMIENTOS EN 2 y 3-D:

Ejemplo 12. El vector posición de un cuerpo varía con el tiempo de acuerdo con la expresión: $\vec{r}(t) = \left(-3m + 2\frac{m}{s} \cdot t;\ 5m;\ -4\frac{m}{s} \cdot t + 1\frac{m}{s^2} \cdot t^2\right)$.

(a) Hallar las expresiones para $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$

Rta: $\vec{v}(t) = \left(2\frac{m}{s};\ 0;\ -4\frac{m}{s} + 2\frac{m}{s^2} \cdot t\right)$; $\vec{a}(t) = \left(0;\ 0;\ 2\frac{m}{s^2}\right)$

En este ejemplo el vector aceleración es constante (porque todas sus componentes lo son). El vector velocidad no es constante, porque al menos una de sus componentes (en este ejemplo, la componente *z*) varía con el tiempo.

(b) Calcular la posición, la velocidad y la aceleración a los *3 s*

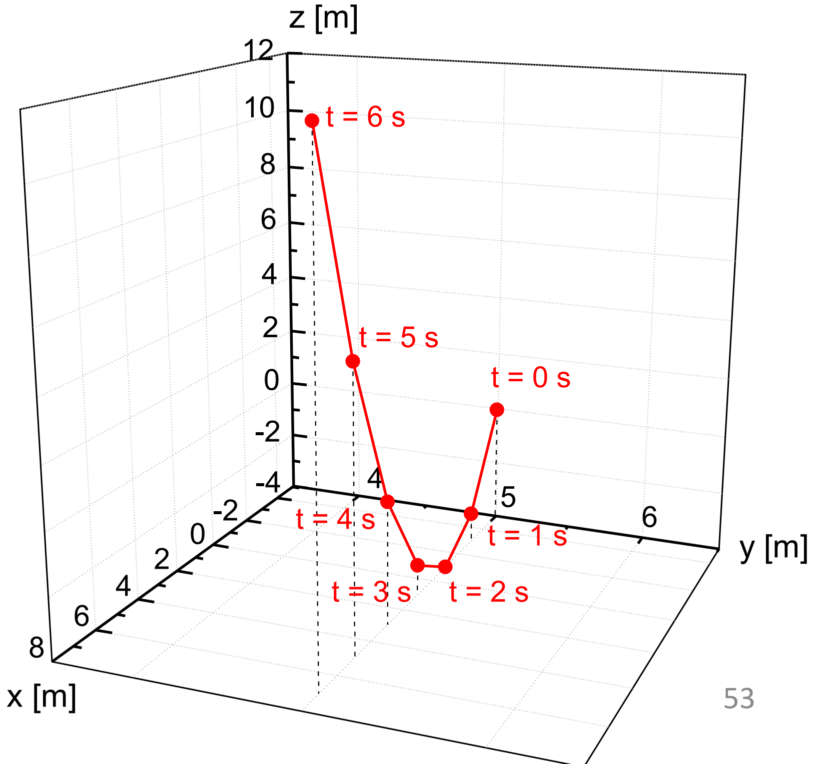
Rta: $\vec{r}(3s) = (3m;\ 5m; -3m\ )$;

$\vec{v}(3s) = \left(2\frac{m}{s};\ 0; 2\frac{m}{s}\right)$;

$\vec{a}(3s) = \left(0;\ 0;\ 2\frac{m}{s^2}\right)$

(c) Graficar la trayectoria durante los instantes iniciales

Rta:



Ejemplo 13. Una partícula se mueve en 2-D siguiendo una trayectoria dada por la ecuación:

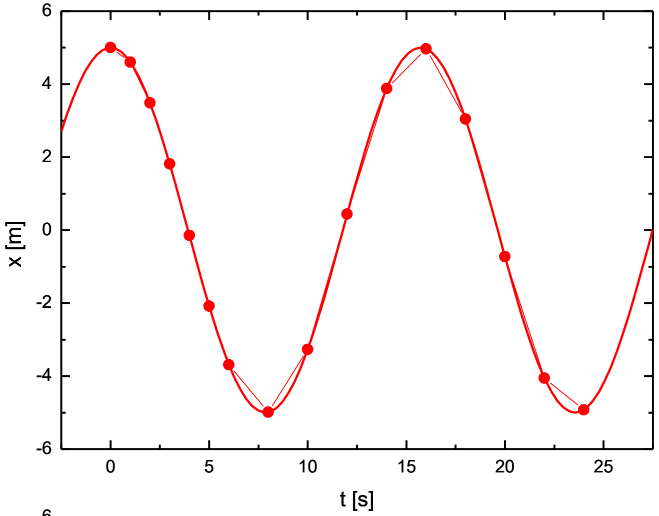
$$\vec{r}(t) = 5m \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} + 5m \cdot \mathrm{sen}(0.4s^{-1}t)\breve{\jmath}$$

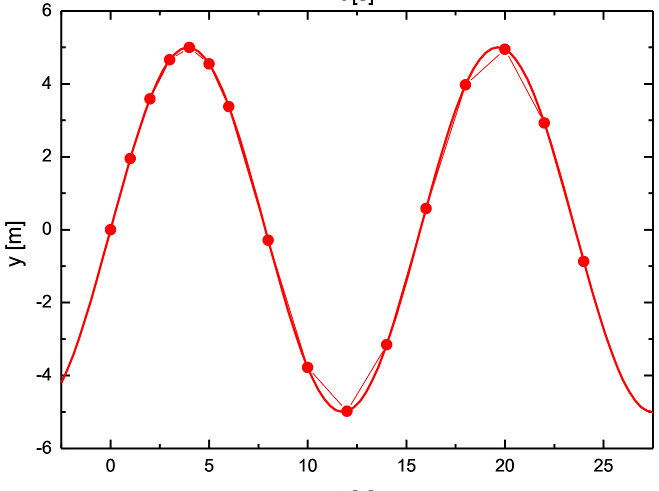
(a) Graficar $x(t)$, $y(t)$, y la trayectoria en el plano xy

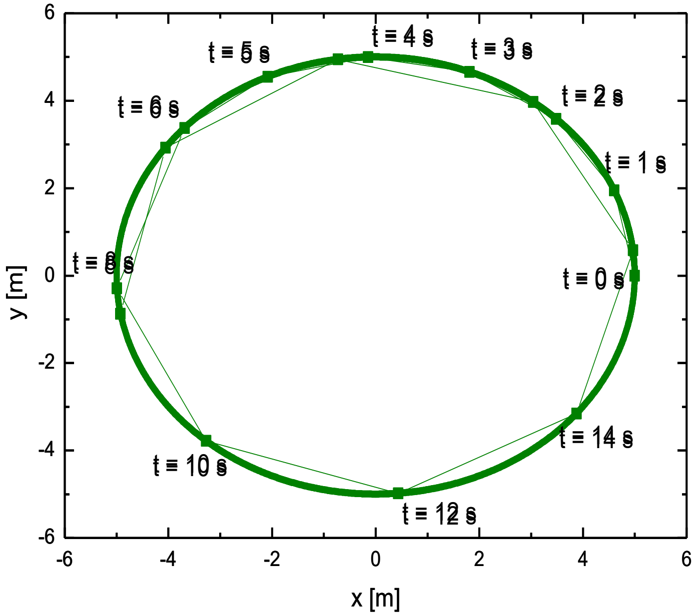
NOTA: A menos que se indique lo contrario, el argumento de las funciones trigonométricas está en *radianes*

Rta: Hagamos una Tabla

t [s]	x [m]	y [m]
0	5	0
1	4.6053	1.9471
2	3.4835	3.58678
3	1.8118	4.6602
4	-0.146	4.99787
5	-2.0807	4.54649
6	-3.687	3.37732







Trayectoria circular !

Ejercicio 6. Calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para los instantes iniciales y graficar sobre la trayectoria (Respuesta en la sig. diapositiva)

Ejercicio 6 (continuación). Una partícula se mueve en 2-D siguiendo una trayectoria dada por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = 5m \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} + 5m \cdot \mathrm{sen}(0.4s^{-1}t)\breve{\jmath}$$

Calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para los instantes iniciales y graficar sobre la trayectoria.

Rta: Derivando:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\frac{m}{s} \cdot \mathrm{sen}(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} + 2\frac{m}{s} \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\jmath}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -0.8\frac{m}{s^2} \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} - 0.8\frac{m}{s^2} \cdot \mathrm{sen}(0.4s^{-1}t)\,\breve{\jmath}$$

Calculando para distintos instantes:

t [s]	*v_x [m/s]*	*v_y [m/s]*	*a_x [m/s²]*	*a_y [m/s²]*
0	0.000	2.000	-0.800	0.000
2	-1.435	1.393	-0.557	-0.574
4	-1.999	-0.058	0.023	-0.799
6	-1.351	-1.475	0.590	-0.540
8	0.117	-1.997	-0.799	-0.047
10	1.514	-1.307	0.523	0.605

(sigue…)

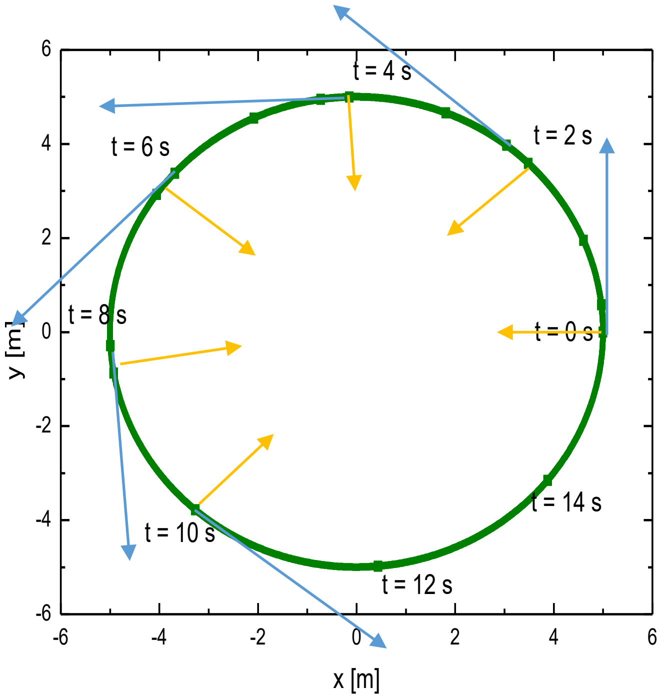
MOVIMIENTO EN 2 y 3 DIMENSIONES

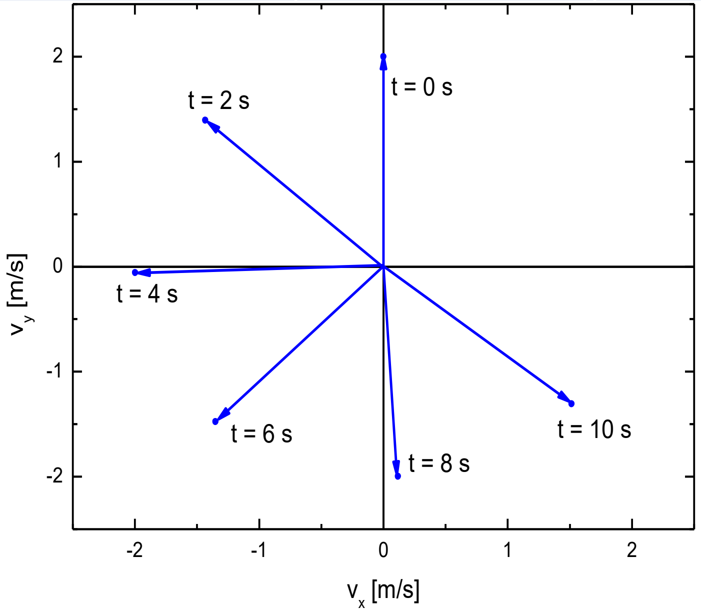
Ejercicio 6 (continuación). Una partícula se mueve en 2-D siguiendo una trayectoria dada por la ecuación:

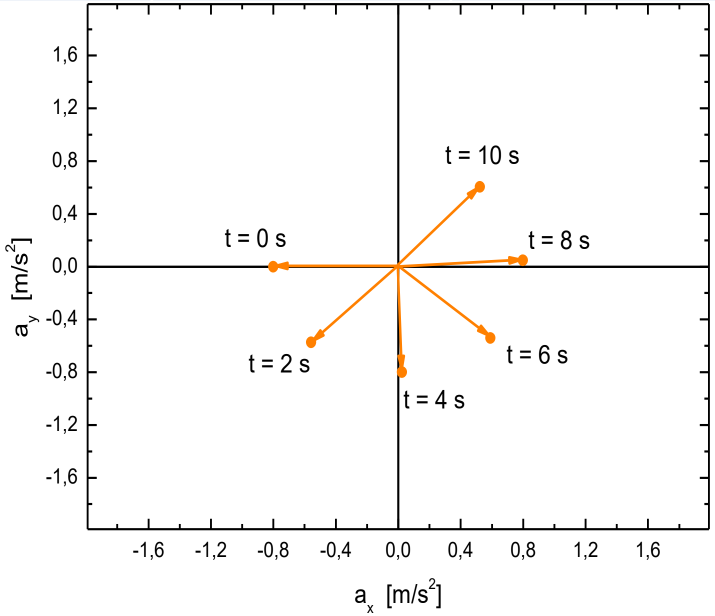
$$\vec{r}(t) = 5m \cdot \cos(0.4s^{-1}t)\,\breve{\imath} + 5m \cdot \mathrm{sen}(0.4s^{-1}t)\,\breve{\jmath}$$

Calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ para los instantes iniciales y graficar sobre la trayectoria.

t [s]	v_x [m/s]	v_y [m/s]	a_x [m/s²]	a_y [m/s²]
0	0.000	2.000	-0.800	0.000
2	-1.435	1.393	-0.557	-0.574
4	-1.999	-0.058	0.023	-0.799
6	-1.351	-1.475	0.590	-0.540
8	0.117	-1.997	-0.799	-0.047
10	1.514	-1.307	0.523	0.605







VOLVEREMOS A ESTUDIAR ESTE TIPO DE MOVIMIENTO MÁS ADELANTE