TRABAJO PRACTICO Nº 4

CALCULO DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN: Primera Parte

1. Sea el lenguaje de primer orden L que tiene un símbolo de constante c, dos símbolos de función f y g (f unario y g binario) y dos símbolos de relación binarios P y Q.
   Decidir cuáles de las siguientes expresiones pertenecen al lenguaje y cuáles no.
   -Para el primer caso determine cuáles son términos, cuáles fórmulas atómicas y cuáles fórmulas.
   -Para las que no pertenecen al lenguaje indique por qué.

   (a) $(\exists f(x) P(f(x,y)))$
   (b) $\forall x(P \vee Q)$
   (c) $g(f(x), f(y))$
   (d) $\forall x \exists c P(x,c)$
   (e) $\exists x \exists y Q(P(x,y), P(y,x))$
   (f) $P(f(x), f(y))$
   (g) $\forall x \exists y(P(g(x,y),y) \wedge \neg Q(x,y))$
   (h) $g(x, \exists y(P(y,c))$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas:

   (a) Determine el alcance de cada cuantificador e indique cuáles son las variables libres y cuáles las ligadas.
   (b) Realice los cambios necesarios para que cada ocurrencia de una variable aparezca libre o ligada, y en este último caso a un solo cuantificador.
   (c) Determine si es o no cerrada.

      1. $\forall x(P(x,y) \rightarrow Q(x))$
      2. $\forall x P(x,y) \rightarrow Q(x)$
      3. $\exists x(A(x,y) \wedge \forall y B(y))$
      4. $\forall x(\forall y A(x,y,z) \rightarrow \exists x A(x,z,z))$
      5. $\exists x A(x) \rightarrow \forall x A(x)$
      6. $\forall x(\forall y(A(x,y) \rightarrow \exists z B(y,z)) \rightarrow \exists x C(x,z))$

3. Para cada una de las siguientes fórmulas, realice las sustituciones indicadas. Justifique.

   (a) $A = \forall x(P(x,y) \rightarrow Q(x))$ .... $A(y/f(c))$ para c constante
   (b) $A = \forall x(P(x,y) \rightarrow Q(x))$ .... $A(y/f(x))$
   (c) $A = \forall x(P(x,y) \rightarrow Q(x))$ .... $A(x/f(c))$ para c constante
   (d) $A = \exists x(D(x,y) \wedge \forall y B(y,z))$ .... $A(y/f(c), z/c)$ para c constante
   (e) $A = \exists x(D(x,y) \wedge \forall y B(y,z))$ .... $A(y/f(z), z/y)$
   (f) $A = \exists x D(x,y) \wedge \forall y B(y,x)$ .... $A(y/f(c), x/f(c))$ para c constante
   (g) $A = \forall x D(x) \rightarrow \exists x \exists y(B(x) \wedge C(x,y))$ ... $A(x/f(y), y/z)$ para c constante

4. Dadas e_1 y e_2 sustituciones:

   (a) $e_1 = \{x/y, y/f(x)\}$ $e_2 = \{x/a, y/x, z/f(a)\}$
   (b) $e_1 = \{y/f(x), z/b\}$ $e_2 = \{x/c, z/c\}$
   (c) $e_1 = \{x/a, y/z\}$ $e_2 = \{x/a, y/c, z/y\}$
   (d) $e_1 = \{x/f(y), y/z\}$ $e_2 = \{x/a, y/c, z/f(y)\}$
   (e) $e_1 = \{x/a, y/f(z, a)\}$ $e_2 = \{x/b, y/c, z/y\}$

   1. Calcule la composición e_1e_2
   2. Calcule Ae_1e_2 siendo $A = \exists xD(x, y) \wedge \forall yB(y, z)$

5. Formalice en el cálculo de predicados de primer orden las siguientes oraciones del lenguaje natural, usando funciones siempre que sea posible:

   (a) El padre de Bárbara ama a su madre.
   (b) Pedro ama a la hermana de María.
   (c) Todo padre quiere mucho a sus hijos.
   (d) Si la suma de dos números enteros es más grande que su producto, luego uno de los números debe ser cero.
   (e) En los números reales, el producto de cualquier número real positivo por cualquier número negativo, es negativo.

6. Dadas las siguientes oraciones en lenguaje natural:

   (a) Algunos caballos son salvajes.
   (b) No hay un número primo entre 23 y 29.
   (c) No todos los pájaros pueden volar.
   (d) Cada persona es amada por alguien.
   (e) Todas las personas tienen algún amigo.
   (f) Sólo los científicos que trabajan en áreas aplicadas son famosos.
   (g) En lo números naturales, el siguiente de cualquier número par no es par. El siguiente de cualquier número no par es par.
   (h) Si el producto de dos números naturales es múltiplo de un número primo, entonces uno de ellos es múltiplo del número primo.
   (i) Dos personas son hermanas si tienen el mismo padre.

   1. Formalice cada oración en el cálculo de predicados de primer orden.
   2. Escriba la negación de cada fórmula obtenida y vuelva a traducirla al lenguaje natural.

7. Dados los siguientes predicados:

$real(x)$	x es un número real	$int(x)$	x es un número entero
$primo(x)$	x es un número primo	$pos(x)$	x es un número positivo
$impar(x)$	x es un número impar	$par(x)$	x es un número par
$mayor(x, y)$	x es mayor que y	$factor(x, y)$	x es factor de y
$suma(x, y, z)$	$x + y = z$	$resta(x, y, z)$	$x - y = z$
$mult(x, y, z)$	$x * y = z$	$div(x, y, z)$	$\lfloor x/y \rfloor = z$

   Reescriba en lenguaje natural las siguientes fórmulas del cálculo de predicados.

(a) $\forall x(\neg par(x) \rightarrow primo(x))$
(b) $\forall x(int(x) \rightarrow real(x))$
(c) $\forall x(primo(x) \wedge mayor(x,2) \rightarrow impar(x))$
(d) $\exists x(int(x) \wedge par(x) \wedge primo(x))$
(e) $\forall x \forall y \exists z(int(x) \wedge int(y) \rightarrow int(z) \wedge suma(x,y,z))$
(f) $\exists z \forall x \forall y(int(x) \wedge int(y) \rightarrow int(z) \wedge suma(x,y,z))$
(g) $\forall x \forall y \exists z(int(x) \wedge int(y) \wedge int(z) \wedge div(x,y,z) \rightarrow mult(y,z,x))$
(h) $\exists x \forall y(int(x) \wedge int(y) \rightarrow \exists z(int(z) \wedge pos(z) \wedge resta(x,y,z)))$
(i) $\forall x \forall y(real(x) \wedge real(y) \wedge pos(x) \wedge \neg pos(y) \rightarrow mayor(y,x))$
(j) $\forall x \forall y(real(x) \wedge real(y) \wedge pos(x) \wedge \neg pos(y) \rightarrow factor(x,y))$

8. Formalice en el cálculo de predicados de primer orden las siguientes oraciones en lenguaje natural, primero sin utilizar cuantificadores existenciales y después sin utilizar cuantificadores universales.

   (a) Algunas personas son simpáticas o altas.
   (b) No todas las bicicletas tienen dos ruedas.
   (c) Ningún ratón es más pesado que un elefante.
   (d) Todo número es negativo o posee raíz cuadrada.

9. Formalice en el cálculo de predicados de primer orden las siguientes oraciones del lenguaje natural:

   (a) No todos los individuos son alumnos.
   (b) No existe ningún individuo que sea alumno.
   (c) No existe ningún profesor que sea alto.
   (d) Existe un profesor que está más ocupado o tiene más éxito que cualquier alumno.
   (e) Si todos los individuos son alumnos, no existe ninguno que vaya al gimnasio.
   (f) En general, cualquier individuo está más ocupado que otro sí y sólo sí éste va al gimnasio y el otro no.
   (g) Todos los profesores que van al gimnasio conocen a algún alumno.
   (h) Sólo los profesores que van al gimnasio conocen a algún alumno.
   (i) Algunos alumnos sólo conocen a los profesores que van al gimnasio.

10. Sean las siguientes relaciones definidas sobre el conjunto de las piezas de ajedrez: $T(x)$ significa que x es una torre, $C(x)$ significa que x es un caballo, $MD(x)$ que x se mueve en diagonal, $B(x)$ que x es una pieza blanca, $N(x)$ que x es una pieza negra, $CP(x,y)$ significa que x come a y; $A(x,y)$ significa que x está alineada con y. Usando únicamente estos símbolos de relación definidos traduzca las siguientes oraciones a la lógica de predicados de primer orden:

    (a) Ninguna torre se mueve en diagonal.
    (b) Toda pieza se mueve en diagonal, salvo si es una torre o un caballo.
    (c) Una pieza blanca sólo come piezas negras.
    (d) Para que una torre coma un caballo es necesario que las dos piezas estén alineadas.

11. Formalice los siguientes argumentos en el cálculo de predicados de primer orden:

   (a) Cualquiera que estudie y haga deporte es amigo de Pedro. Si María es perezosa no es amiga de Pedro, pero si no lo es, trabajará con Hernán. Sabemos que nadie trabaja con Hernán. Por lo tanto, María no estudia o no hace deporte.

   (b) A todos los gatos les gusta el queso o los ratones o ambas cosas. Blanco y Negro son gatos. A nadie que le gusta el queso le gusta el jamón. Únicamente a los que les gusta la gaseosa les gustan los ratones. A Blanco no le gusta lo que le gusta a Negro, y sí le gusta lo que no le gusta a Negro. A Blanco le gusta el jamón y la gaseosa. Por lo tanto, hay un gato al que le gusta el queso y no le gustan los ratones.

   (c) Sólo las buenas personas ayudan a los ancianos. Ninguna buena persona es aficionada a la fotografía. Antonio ayuda a Juan. Antonio es aficionado a la fotografía. Entonces, Juan es anciano.