TRABAJO PRACTICO Nº 1

LOGICA PROPOSICIONAL

1. Sean a, b, c y d variables proposicionales. Elimine tantos paréntesis como sea posible de las siguientes fórmulas:

   (a) $((b \rightarrow (\neg a)) \wedge c)$
   (b) $(a \vee (b \vee c))$
   (c) $(((a \wedge (\neg b)) \wedge c) \vee d)$
   (d) $((b \vee (\neg c) \vee (a \wedge b)))$
   (e) $(\neg((\neg(\neg(b \vee c))) \rightarrow (b \wedge c)))$
   (f) $((((a \rightarrow b) \vee (c \rightarrow d)) \wedge (\neg a)) \vee c)$
   (g) $(a \rightarrow (b \rightarrow c))$

2. Sean p, q y r variables proposicionales. De acuerdo a las leyes de precedencia de operadores, la fórmula $\neg p \rightarrow \neg q \wedge r$ es implícitamente una de las siguientes. ¿Cuál de ellas? Justifique.

   (a) $((\neg p) \rightarrow (\neg q)) \wedge r$
   (b) $(\neg p) \rightarrow \neg(q \wedge r)$
   (c) $\neg(p \rightarrow \neg(q \wedge r))$
   (d) $(\neg p) \rightarrow ((\neg q) \wedge r)$
   (e) $\neg(p \rightarrow ((\neg q) \wedge r))$

3. Sea F el conjunto de fórmulas lógicas definido por la siguiente definición BNF:

   $< form\_\log >::=< form\_\log >\rightarrow< form\_or > \mid < form\_or >$

   $< form\_or >::=< form\_or > \vee < form\_and > \mid < form\_and >$

   $< form\_and >::=< form\_and > \wedge < factor\_\log > \mid < factor\_\log >$

   $< factor\_log >::= (< form\_\log >) \mid \neg < factor\_\log > \mid < var\_prop >$

   $< var\_prop >::= a|b|c|...|z$

   (a) Escriba 5 cadenas que no sean fórmulas de F y 5 que sí lo sean.
   (b) Para cada fórmula del ejercicio 4), determine usando árboles de derivación, si es una fórmula de F.

4. Sean p, q y r variables proposicionales. Para cada una de las siguientes fórmulas, construya la tabla de verdad y determine si es una tautología, una contradicción o una contingencia:

   (a) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
   (b) $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
   (c) $\neg(p \wedge q \wedge r \rightarrow p \vee q)$

(d) $(p \to \neg p) \longleftrightarrow \neg p$

(e) $(\neg p \to \neg q) \vee (q \to p)$

5. Sean p, q y r variables proposicionales. ¿Cuáles de las siguientes fórmulas proposicionales son tautologías?

   (a) $(p \to (q \to p))$

   (b) $q \vee r \to (\neg r \to q)$

   (c) $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$

   (d) $(p \to (q \to r)) \to p \wedge \neg q \vee r$

   (e) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

6. Sean p, q y r variables proposicionales. Usando tablas de verdad, muestre si los siguientes pares de fórmulas son o no equivalentes:

   (a) $p \wedge (q \vee r)$ y $p \wedge q \vee p \wedge r$

   (b) $p \vee q \wedge r$ y $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   (c) $p \vee p \wedge q$ y p

   (d) $p \wedge q \vee \neg q$ y $p \vee \neg q$

   (e) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ y p

7. Sean a, b y c variables proposicionales. Usando las leyes de equivalencias para fórmulas lógicas, determine cuáles de los siguientes pares de fórmulas son equivalencias lógicas

   (a) $a \to b$ y $\neg(a \wedge \neg b)$

   (b) $a \leftrightarrow b$ y $(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$

   (c) $a \to (b \to c)$ y $(a \to b) \to c$

   (d) $(a \vee (b \leftrightarrow c))$ y $(a \vee b) \leftrightarrow (a \vee c)$

   (e) $(a \to (b \leftrightarrow c))$ y $(a \to b) \leftrightarrow (a \to c)$

8. Sean x e y variables proposicionales. Simplifique cada una de las siguientes fórmulas hasta obtener $1, 0, x, y, x \wedge y, x \vee y$.

   (a) $\neg y \to y$

   (b) $\neg y \to \neg y$

   (c) $x \vee (y \vee x) \vee \neg y$

   (d) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$

   (e) $x \vee y \vee \neg x$

   (f) $\neg x \wedge y \vee x$

   (g) $\neg x \to x \wedge y$

   (h) $1 \to (\neg x \to x)$

   (i) $x \to (y \to x \wedge y)$

   (j) $\neg x \to (\neg x \to \neg x \wedge y)$

   (k) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

(l) $(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$

9. Sean p, q y r variables proposicionales. Dadas las siguientes fórmulas lógicas:

   (a) $p \to (q \to r)$
   (b) $p \leftrightarrow q$
   (c) $p \wedge q \wedge r$

   Encuentre fórmulas equivalentes a ellas usando solamente los siguientes conectivos:

   (a) $\{\neg, \wedge\}$
   (b) $\{\neg, \vee\}$
   (c) $\{\neg, \to\}$

10. Dadas dos fórmulas A y B, y sabiendo que $A \to B$ es una tautología. Indicar cuáles de las siguientes opciones son válidas.

    (a) $A \vee B$ es una tautología
    (b) $A \wedge B$ es una tautología
    (c) $\neg A \longrightarrow \neg B$ es una tautología
    (d) $\neg B \longrightarrow \neg A$ es una tautología
    (e) $A \wedge \neg B$ es una tautología
    (f) $A \wedge \neg B$ es una contingencia
    (g) $A \wedge \neg B$ es una contradicción

11. Sean p, q, r y s variables proposicionales. Determine si cada uno de los siguientes conjuntos de fórmulas es o no satisfacible. Para las fórmulas mutuamente satisfacibles, dé una valuación v que las satisfaga.

    (a) $\{p \wedge q, \neg p \wedge q\}$
    (b) $\{p \wedge q, \neg p \vee q\}$
    (c) $\{p \to q, p \vee q, \neg q\}$
    (d) $\{p \to q, q \to r, r \to s, p \to s\}$
    (e) $\{p \to q, q \to r, r \to s, p \wedge \neg s\}$
    (f) $\{p \vee q, p \vee (q \wedge r), p \to \neg r\}$
    (g) $\{p \to q, (p \wedge q) \to r, q \to \neg p\}$

12. Sea G el conjunto de fórmulas lógicas definido por la siguiente definición BNF:

    $< form\_\log >::=< form\_\log >\to< form\_\log > \mid < form\_\log > \vee < form\_\log > \mid < form\_\log > \wedge < form\_\log > \mid\neg < form\_\log > \mid(< form\_\log >)\mid < var\_prop >$

    $< var\_prop >::= a|b|c|...|z$

    Sea $v(p) = 1$, $v(q) = 1$ y $v(r) = 1$, los valores de verdad asociados a las variables proposicionales p, q y r, respectivamente.

(a) Usando árboles de derivación determine si la siguiente fórmula lógica es una fórmula de G. Si es posible construir más de un árbol de derivación, constrúyalos y determine el valor de verdad de la fórmula en cada caso.
$\{p \to q \vee r \wedge \neg r\}$

(b) Realice el mismo procedimiento que en el inciso anterior según la definición de BNF dada en el ejercicio 3)

(c) Compare resultados y saque conclusiones

13. Determinar la opción correcta al formalizar las siguientes frases en lenguaje natural como fórmulas del cálculo proposicional

(a) Un país va bien si y solo si hay crecimiento económico y no hay inflación.

1. $p \longleftrightarrow (q \wedge r)$
2. $(p \longrightarrow q \wedge \neg r) \wedge (q \wedge \neg r \longrightarrow p)$
3. $p \longrightarrow q \wedge \neg r$
4. $(q \wedge r \longrightarrow p) \wedge (p \longrightarrow q \wedge r)$

(b) En Argentina hay inflación y no hay crecimiento económico, por tanto, Argentina no va bien.

1. $p \wedge \neg q \longrightarrow \neg r$
2. $\neg r \longrightarrow p \wedge \neg q$
3. $p \wedge q \longrightarrow r$
4. $p \longrightarrow \neg r$

(c) Cuando la economía no crece o el petróleo sube, el peso se devalúa a menos que la economía americana vaya peor.

1. $\neg s \longrightarrow (\neg p \vee q \longrightarrow r)$
2. $(\neg p \vee q \longrightarrow r) \longrightarrow s$
3. $\neg s \longrightarrow (r \longrightarrow \neg p \vee q)$
4. $s \longrightarrow (p \vee q \longrightarrow r)$

(d) Los trámites largos se realizan en la oficina de arriba o en la de abajo (no en ambas), sin embargo, los trámites largos se realizan en la oficina de abajo sólo si la de arriba está ocupada.

1. $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \longleftrightarrow r)$
2. $(p \vee q \vee \neg(p \wedge q)) \wedge (r \longrightarrow q)$
3. $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge (q \longrightarrow r)$

14. Reescriba las siguientes oraciones en lenguaje natural como fórmulas del cálculo proposicional clásico:

(a) Handel es un gran músico, y Vivaldi también.

(b) Si hay poco tránsito y salimos temprano, llegaremos más tarde de lo previsto.

(c) El tránsito y la lluvia lo han puesto de mal humor.

(d) Si M es negativo entonces Q es negativo. Si P es positivo, entonces Q es negativo. Por lo tanto, si M es negativo o P es positivo, luego Q es negativo.

(e) Si M es negativo entonces Q es negativo. Si P es positivo, entonces Q es negativo. Por lo tanto, si M es negativo y P es positivo, luego Q es negativo.

(f) Si miro al cielo y estoy alerta entonces veré un satélite, o si no estoy alerta, no veré un satélite.

(g) Si salto por la ventana, me hago daño o empiezo a volar.

(h) Si salto por la ventana, me hago daño o empiezo a volar, pero no ambas.

(i) Si salto por la ventana me podría hacer daño, sin embargo, empiezo a volar.

(j) Si salto por la ventana me podría hacer daño, a menos que empiece a volar.

(k) Si llueve las calles están vacías. Si las calles están vacías el comercio obtiene pérdidas. Los músicos no podrían sobrevivir si los comerciantes no les contratasen para componer canciones para publicidad. Los comerciantes contratan canciones publicitarias cuando tienen pérdidas. Por tanto, si llueve los músicos pueden sobrevivir.

15. Reescriba el siguiente par de oraciones equivalentes en lenguaje natural como un par de fórmulas equivalentes y demuestre dicha equivalencia:

    "Si n es un número natural, entonces si n es par su cuadrado es par" y "Si n es un número natural y es par, entonces su cuadrado es par."

16. Dadas las siguientes oraciones en lenguaje natural, formalíceles en el cálculo proposicional y escriba otras dos oraciones en lenguaje natural para cada una de ellas que sean lógicamente equivalentes.

    (a) Llevo piloto sólo si llueve.
    (b) Llevo piloto sólo si no hay sol.
    (c) No llevo piloto sólo si hay sol.

17. Determine si las siguientes oraciones en lenguaje natural son mutuamente satisfacibles:

    (a) Llueve o está nublado. No llueve. Está nublado.
    (b) Si me levanto temprano, estaré cansado. Me levanto temprano. No estoy cansado.
    (c) Si hay sol, vamos al club. Si es sábado, vamos al club. Si hay sol y es sábado entonces vamos al club.
    (d) La venta de casas cae si el interés sube. Los rematadores no están contentos si la venta de casas cae. El interés sube. Los rematadores están contentos.

FORMULAS LOGICAMENTE EQUIVALENTES

1. Leyes conmutativas
   1. $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
   2. $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
   3. $(A \leftrightarrow B) \equiv (B \leftrightarrow A)$
2. Leyes asociativas
   1. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
   2. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
3. Leyes distributivas
   1. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   2. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
4. Leyes de De Morgan
   1. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
   2. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
5. Ley de negación

$\neg(\neg A) \equiv A$

6. Ley del tercero excluido

$A \vee \neg A \equiv 1$

7. Ley de contradicción
   $A \wedge \neg A \equiv 0$
8. Ley de implicación

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

9. Leyes de simplificación del $\vee$
   1. $A \vee A \equiv A$
   2. $A \vee 1 \equiv 1$
   3. $A \vee 0 \equiv A$
   4. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
10. Leyes de simplificación del $\wedge$
    1. $A \wedge A \equiv A$
    2. $A \wedge 1 \equiv A$
    3. $A \wedge 0 \equiv 0$
    4. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
11. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
12. $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$