Ciencias de la Computación I

Propiedades de Clausura de Lenguajes Regulares y Lenguajes Libres del Contexto

Propiedades de Clausura de Lenguajes Regulares

Los lenguajes regulares (LR) son cerrados bajo las siguientes operaciones:

- ✓ Unión
- ✓ Intersección
- ✓ Complemento
- ✓ Clausura
- ✓ Reversa
- ✓ Concatenación

Cualquiera de estas operaciones aplicadas sobre lenguajes regulares da como resultado otro lenguaje regular.

Intersección de Lenguajes Regulares

Teorema: Dados L_1 y L_2 lenguajes regulares, $L_1 \cap L_2$ es un lenguaje regular.

Demostración:

Como L_1 es LR existe un AFD $M_1 = <E_1, A_1, \delta_1, e_{01}, F_1>$ tal que $L_1 = L(M_1)$

Como L_2 es LR existe un AFD $M_2 = <E_2, A_2, \delta_2, e_{02}, F_2>$ tal que $L_2 = L(M_2)$

A partir de M_1 y M_2 es posible definir un AFD M de la siguiente manera:

$M = < E_1 \times E_2, A_1 \cup A_2, \delta, [e_{01}, e_{02}], F_1 \times F_2>$ $\qquad E_1 \cap E_2 = \varnothing$

δ se define como: $\delta([e_j, e_k], a) = [\delta_1(e_j, a), \ \delta_2(e_k, a)]$

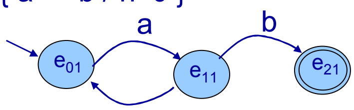
para todo $e_j, \in E_1 \ \ e_k \in E_2$ y para todo $a \in A$

Como $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2) = L_1 \cap L_2 \quad L_1 \cap L_2$ es un lenguaje regular

Ejemplo Intersección entre dos Lenguajes Regulares

$L_1 = \{ a^{2n+1}b \ / \ n \geq 0 \}$

δ_1

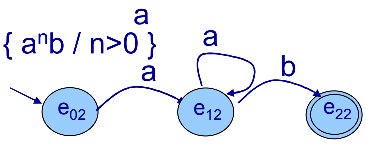


$M_1 = <\{e_{01}, e_{11}, e_{21}\}, \{a,b\}, \delta_1, e_{01}, \{e_{21}\}>$

$L(M_1) = L_1$

$L_2 = \{ a^n b \ / \ n>0 \}$

δ_2



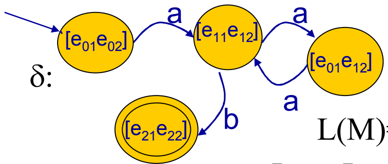
$M_2 = <\{e_{02}, e_{12}, e_{22}\}, \{a,b\}, \delta_2, e_{02}, \{e_{22}\}>$

$L(M_2) = L_2$

A partir de M_1 y M_2, según la demostración anterior, se puede construir un AFD M como:

$M = <\{[e_{01}e_{02}], [e_{11}e_{12}], [e_{01}e_{12}], [e_{21}e_{22}]\}, \{a,b\}, \delta, [e_{01}\ e_{02}], \{[e_{21}\ e_{22}]\}>$

δ:



$L(M) = \{a^{2n+1}b \ / n \geq 0\}$

$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2) = L_1 \cap L_2$

$L_1 \cap L_2$ entonces es regular

Unión de Lenguajes Regulares

Teorema: Dados L_1 y L_2 lenguajes regulares, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular.

Demostración: (usando Autómatas Finitos (AF))

Como L_1 es LR existe un AFD $M_1 = <E_1, A_1, \delta_1, e_{01}, F_1)$ tal que $L_1 = L(M_1)$

Como L_2 es LR existe un AFD $M_2 = <E_2, A_2, \delta_2, e_{02}, F_2)$ tal que $L_2 = L(M_2)$

A partir de M_1 y M_2 es posible definir un AF M de la siguiente manera

$M = < E_1 \cup E_2 \cup \{e_0\}, A_1 \cup A_2, \delta, e_0, F_1 \cup F_2 >$ $\quad e_0 \notin E_1$ y $e_0 \notin E_2$

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$

δ: se define como:

$$\delta(e_k, a) = \begin{cases} \delta_1(e_k, a) & \text{si } e_k \in E_1 \\ \delta_2(e_k, a) & \text{si } e_k \in E_2 \end{cases}$$

para todo $e_k \in E_1 \cup E_2$ y
para todo $a \in A_1 \cup A_2$

Además se define $\delta(e_0, \varepsilon) = e_{01}$ y $\delta(e_0, \varepsilon) = e_{02}$

M es AFND-ε. pero aplicando los algoritmos estudiados se puede obtener un AFD equivalente que acepta el mismo lenguaje que M.

Como $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2) = L_1 \cup L_2$ luego $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular

Unión de Lenguajes Regulares

Teorema:

Dados L_1 y L_2 lenguajes regulares, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular.

Demostración: (usando Expresiones Regulares (ER))

Como L_1 es LR existe una ER r_1 tal que $L_1 = L(r_1)$

Como L_2 es LR existe una ER r_2 tal que $L_2 = L(r_2)$

$r_1 + r_2$ es ER que describe el lenguaje regular $L(r_1) \cup L(r_2)$

Como $L(r_1) = L_1$ y $L(r_2) = L_2$ entonces $L(r_1) \cup L(r_2) = L_1 \cup L_2$

Por lo tanto, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular

Unión de Lenguajes Regulares

Teorema:

Dados L_1 y L_2 lenguajes regulares, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular.

Demostración: (usando Gramáticas Regulares (GR))

Como L_1 es LR existe una GR $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ tal que $L_1 = L(G_1)$

Como L_2 es LR existe una GR $G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$ tal que $L_2 = L(G_2)$

A partir de G_1 y G_2 es posible definir una gramática G como sigue:

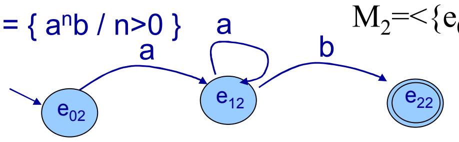
$G = (N_1 \cup N_2, T_1 \cup T_2, P, S)$ $\quad\quad N_1 \cap N_2 = \varnothing$

$P = P_1 \cup P_2$ $\quad$ reemplazando S_1 en P_1 y S_2 en P_2 por S

Como las reglas de P son las reglas de P_1 y P_2, G es una GR y entonces $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$ es un lenguaje regular

Ejemplo Complemento entre dos Lenguajes Regulares

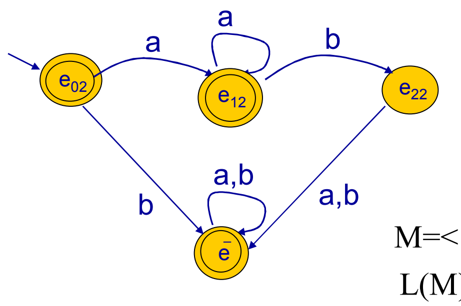
$L_2 = \{ a^n b \,/\, n>0 \}$



$M_2 = <\{e_{02}, e_{12}, e_{22}\}, \{a,b\}, \delta_2, e_{02}, \{e_{22}\}>$

$L(M_2) = L_2$

A partir de M_2, se puede construir un AFD M como:



$M = <\{e_{02}, e_{12}, e_{22}, \bar{e}\}, \{a,b\}, \delta, e_{02}, \{e_{02}, e_{12}, \bar{e}\}>$

$L(M) = \{a,b\}^* - \{a^n b \,/\, n>0\}$

Como $L(M) = \overline{L(M_2)} = \overline{L_2}$ $\quad\quad \overline{L_2}$ es un lenguaje regular

Complemento de un Lenguaje Regular

Teorema:

Dado L lenguaje regular, $\overline{L}$ es un lenguaje regular.

Demostración:

Como L es LR existe un AFD $M = \langle E, A, \delta, e_0, F \rangle$ tal que $L = L(M)$

A partir de M, se puede construir un nuevo autómata M´ tal que $L(M') = \overline{L}$

M´ se define como $M' = \langle E \cup \{\overline{e}\}, A, \delta', e_0, (E - F) \cup \{\overline{e}\} \rangle$,

donde δ' se define como

- si $e_k \in E$ y $\delta(e_k, a)$ está definida $\delta'(e_k, a) = \delta(e_k, a)$ para todo $e_k \in E$ y para todo $a \in A$
- si $e_k \in E$ y $\delta(e_k, a)$ no está definida $\delta'(e_k, a) = \overline{e}$ para todo $e_k \in E$ y para todo $a \in A$
- si $e_k = \overline{e}$ $\quad \delta'(\overline{e}, a) = \overline{e}$ $\quad$ para todo $a \in A$

Como $L(M') = \overline{L}$ $\quad \overline{L}$ es un lenguaje regular

Reversa de un Lenguaje Regular

Teorema:

Dado L lenguaje regular, L^R es un lenguaje regular.

Demostración:

Como L es LR existe una GR lineal a derecha $G = (N, T, P, S)$ tal que $L = L(G)$

A partir de G es posible definir una gramática $G_R = (N, T, P_R, S)$ tal que $L(G_R) = L^R$

donde $P_R = P$ con cada regla de producción de P de la forma
$A \rightarrow aB$ reemplazada por $A \rightarrow Ba$ para $A, B \in N$ y $a \in T$

Como $L(G_R) = L^R$ $\quad L^R$ es un lenguaje regular

Propiedades de Clausura de Lenguajes Libres del Contexto

Los lenguajes libres del contexto (LLC) son cerrados bajo las siguientes operaciones:

- ✓ **Unión**
- ✓ **Clausura**
- ✓ **Reversa**
- ✓ **Concatenación**

Los lenguajes libres del contexto (LLC) no son cerrados bajo las siguientes operaciones:

- ✓ **Intersección**
- ✓ **Complemento**

Ejemplo Unión de lenguajes Libres del Contexto

$L_1 = \{ a^n b^n / n \geq 0 \}$	$L_2 = \{ b^n a^n / n \geq 0 \}$
$L(G_1)=L_1$	$L(G_2)=L_2$
$G_1=<\{A\},\{a,b\},P_1,S_1>$	$G_2=<\{B\},\{a,b\},P_2,S_2>$
$P_1=\{S_1 \rightarrow \varepsilon,$ $S_1 \rightarrow A,$ $A \rightarrow aAb,$ $A \rightarrow ab\}$	$P_2=\{S_2 \rightarrow \varepsilon,$ $S_2 \rightarrow B,$ $B \rightarrow bBa,$ $B \rightarrow ba\}$

A partir de G_1 y G_2, se puede construir una gramática G como:

$G=<\{A,B,S_1,S_2\},\{a,b\},P, S>$

$P=P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\} - \{S_1 \rightarrow \varepsilon, S_2 \rightarrow \varepsilon\}\}$

Si los no terminales en G_1 y G_2 tienen el mismo nombre deben renombrarse

Considerar el caso especial

Si en $P_1 \cup P_2$ estaba $S_1 \rightarrow \varepsilon$ ó $S_2 \rightarrow \varepsilon$ agregar en P: $S \rightarrow \varepsilon$

$P=\{S \rightarrow \varepsilon, S_1 \rightarrow A, A \rightarrow aAb, A \rightarrow ab, S_2 \rightarrow B, B \rightarrow bBa, B \rightarrow ba\}$

$L(G)=L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$ G es tipo 2 luego $L_1 \cup L_2$ es LLC

Unión de Lenguajes Libres del Contexto

Teorema:

Dados L_1 y L_2 LLC, $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje libre del contexto.

Demostración:

Como L_1 es LLC existe una GLC $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ tal que $L_1 = L(G_1)$

Como L_2 es LLC existe una GLC $G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$ tal que $L_2 = L(G_2)$

A partir de G_1 y G_2 es posible definir una gramática libre del contexto

$G = (N, T, P, S)$ tal que $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$

La gramática G se define como sigue

$G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_1, S_2\}, T_1 \cup T_2, P, S)$ $\quad N_1 \cap N_2 = \varnothing$

$P = P_1 \cup P_2 \cup \{ S \to S_1, S \to S_2 \} - \{S_1 \to \varepsilon, S_2 \to \varepsilon\}$ y además

Si en P_1 está la regla $S_1 \to \varepsilon$, ó en P_2 $S_2 \to \varepsilon$ se agrega a P $S \to \varepsilon$

Como las reglas de P respetan el formato de las GLC, G es una GLC y entonces $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2) = L_1 \cup L_2$ es un lenguaje libre del contexto

Ejemplo Concatenación de lenguajes Libres del Contexto

$L_1 = \{ a^n b^n / n \geq 0 \}$	$L_2 = \{ b^n a^n / n \geq 0 \}$
$L(G_1) = L_1$	$L(G_2) = L_2$
$G_1 = <\{A\}, \{a,b\}, P_1, S_1>$	$G_2 = <\{B\}, \{a,b\}, P_2, S_2>$
$P_1 = \{S_1 \to \varepsilon,$ $S_1 \to A,$ $A \to aAb,$ $A \to ab\}$	$P_2 = \{S_2 \to \varepsilon,$ $S_2 \to B,$ $B \to bBa,$ $B \to ba\}$

A partir de G_1 y G_2, se puede construir una gramática $G = <\{A,B,S_1,S_2\}, \{a,b\}, P, S>$

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1S_2\} - \{S_1 \to \varepsilon, S_2 \to \varepsilon\}$$

Considerar casos especiales

Si en $P_1 \cup P_2$ estaban	$S_1 \to \varepsilon$ y $S_2 \to \varepsilon$	agregar en P : $S \to \varepsilon$
Si en P_1 estaba	$S_1 \to \varepsilon$	agregar en P : $S \to S_2$
Si en P_2 estaba	$S_2 \to \varepsilon$	agregar en P : $S \to S_2$

$P = \{S \to S_1S_2, S \to \varepsilon, S \to S_1, S \to S_2, S_1 \to A, A \to aAb, A \to ab, S_2 \to B, B \to bBa, B \to ba\}$

$L(G) = L(G_1).\ L(G_2) = L_1 \cdot L_2$ $\qquad$ G es tipo 2 luego $L_1.L_2$ es LLC

Concatenación de Lenguajes Libres del Contexto

Teorema: Dados L_1 y L_2 LLC, $L_1 . L_2$ es un lenguaje libre del contexto.

Demostración:

Como L_1 es LLC existe una GLC $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ tal que $L_1 = L(G_1)$

Como L_2 es LLC existe una GLC $G_2 = (N_2, T_2, P_2, S_2)$ tal que $L_2 = L(G_2)$

A partir de G_1 y G_2 es posible definir una gramática libre del contexto $G =(N, T, P, S)$ tal que $L(G) = L(G_1) . L(G_2) = L_1 . L_2$

La gramática G se define como sigue

$G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S_1, S_2\}, T_1 \cup T_2, P, S)$ $\quad N_1 \cap N_2 = \varnothing$

$P = (P_1 \cup P_2 \cup \{ S \to S_1S_2 \}) - \{S_1 \to \varepsilon, S_2 \to \varepsilon\}$ y además

Si en P_1 está la regla $S_1 \to \varepsilon$, se agrega a P la regla $S \to S_2$

Si en P_2 está la regla $S_2 \to \varepsilon$, se agrega a P la regla $S \to S_1$

Si en P_1 está la regla $S_1 \to \varepsilon$, y en P_2 $S_2 \to \varepsilon$ se agrega a P $S \to \varepsilon$

Como las reglas de P respetan el formato de las GLC, G es una GLC y entonces $L(G) = L(G_1) . L(G_2) = L_1 . L_2$ es un lenguaje libre del contexto

Clausura de un Lenguaje Libre del Contexto

Teorema: Dado L_1 LLC, L_1^* es un lenguaje libre del contexto.

Demostración:

Como L_1 es LLC existe una GLC $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ tal que $L_1 = L(G_1)$

A partir de G_1 es posible definir una gramática libre del contexto $G =(N, T, P, S)$ tal que $L(G) = L^*(G_1)$

La gramática G se define como sigue $\quad G = (N, T, P, S)$

$N = N_1 \cup \{S_1, X\}$ $\quad X \notin N_1$

$T = T_1$

$P = P_1 \cup \{ S \to \varepsilon, S \to X, X \to S_1X, X \to S_1\} - \{S_1 \to \varepsilon\}$

Como las reglas de P respetan el formato de las GLC, G es una GLC y entonces $L(G) = (L (G_1))^* = L_1^*$ es un lenguaje libre del contexto

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Reversa de un Lenguaje Libre del Contexto

Teorema: Dado L_1 LLC, L_1^R es un lenguaje libre del contexto.

Demostración:

Como L_1 es LLC existe una GLC $G_1 = (N_1, T_1, P_1, S_1)$ tal que $L_1 = L(G_1)$

A partir de G_1 es posible definir una gramática libre del contexto $G = (N, T, P, S)$ tal que $L(G) = (L(G_1))^R$

La gramática G se define como sigue $G = (N_1, T_1, P, S_1)$

Donde $P=P_1$ con cada regla de producción de P_1 de la forma

$A \to \omega$ reemplazada por $A \to \omega^R$ para $A \in N$ y $\omega \in \{N \cup T\}^* - \{\varepsilon\}$

Como las reglas de P respetan el formato de las GLC, G es una GLC y entonces $L(G) = (L(G_1))^R = L_1^R$ es un lenguaje libre del contexto