

# Ciencias de la Computación I

## *Autómatas de Pila y Lenguajes Libres del Contexto*

---

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

### Motivación

---

-¿Es posible diseñar un AF que reconozca el lenguaje  $L_1$ ?

$$L_1 = \{ a^n b^n / n > 0 \}$$

-¿Es posible diseñar un AF que reconozca el lenguaje  $L_2$ ?

$$L_2 = \{ x / x \in \{ (, ) \}^* \text{ y } x \text{ es una cadena con paréntesis balanceados} \}$$

((((( ))) ) ( ( ) ) )

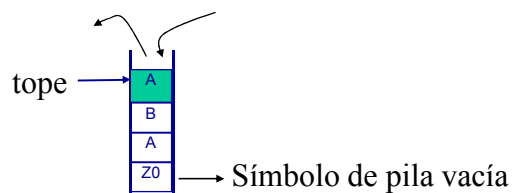
Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Autómatas de Pila

Es necesario agregar algo a los AF para incrementar su poder computacional



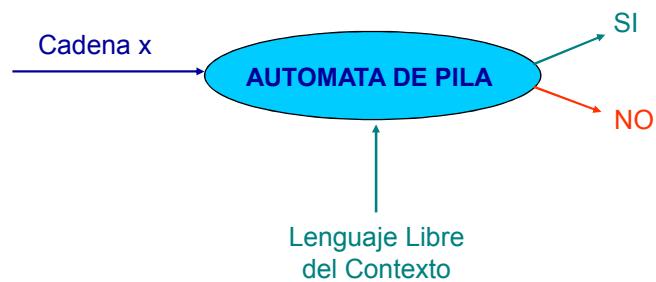
Memoria auxiliar que funciona como una Pila



Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Autómatas de Pila

Dado un lenguaje  $L$ , libre del contexto, definido sobre un alfabeto  $A$  y una cadena  $x$  arbitraria, determinar si  $x \in L$  o  $x \notin L$ .

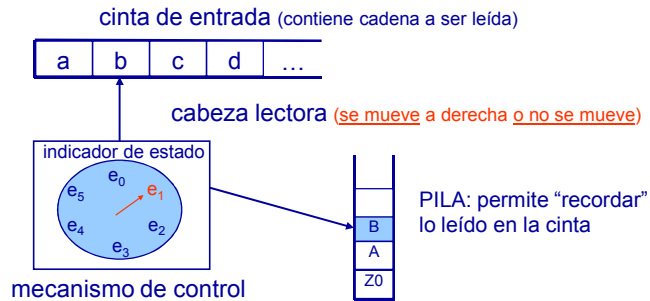


• Dos puntos de vista:

- Como dispositivo **reconocedor** de la pertenencia de una cadena a un lenguaje libre del contexto.
- Como **traductor** de una cadena en otra.

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Autómatas de Pila Reconocedores



### Estados del AP:

- ✓ Cantidad finita.
- ✓ Un estado inicial.
- ✓ Al menos un estado final o de aceptación.

Dada una cadena  $x$  en la cinta de entrada, si el AP lee toda la cadena  $y$ :

➤ **termina en un estado final**

→ **cadena aceptada**

➤ **termina en un estado no final**

→ **cadena rechazada**

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Autómatas de Pila Reconocedores

Formalmente, un AP reconocedor determinístico (APD) se define como una 7-upla

$$\text{APD} = \langle E, A, P, \delta, e_i, F, Z_0 \rangle$$

- ✓  $E$  es un conjunto finito de estados;  $E \neq \emptyset$
- ✓  $A$  es el alfabeto de entrada
- ✓  $P$  es el alfabeto de la pila
- ✓  $\delta$  es la función de transición de estados
- $\delta: E \times (A \cup \{\epsilon\}) \times P \rightarrow E \times P^*$
- ✓  $e_i$  es el estado inicial;  $e_i \in E$
- ✓  $F$  es el conjunto de estados finales o de aceptación;  $F \subseteq E$
- ✓  $Z_0$  símbolo distinguido de la Pila  $Z_0 \in P$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

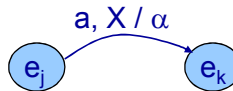
## Autómatas de Pila Reconocedores

✓  $\delta$  es la función de transición de estados

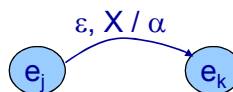
$$\delta: E \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times P \rightarrow E \times P^*$$

$$(1) \delta(e_j, a, X) = (e_k, \alpha)$$

Diagrama de transición



$$(2) \delta(e_j, \varepsilon, X) = (e_k, \alpha)$$

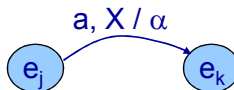


donde  $a \in A$ ;  $X \in P$ ;  $\alpha \in P^*$ ;  $e_j, e_k \in E$

## Autómatas de Pila Reconocedores

### Transiciones de tipo (1)

$$\delta(e_j, a, X) = (e_k, \alpha)$$



Acción sobre la Pila  
Nuevo estado  
Tope de la Pila  
Símbolo por leer en cinta de entrada  
Estado actual

### Ejemplo

	Antes	Después
Si $\alpha = ZYX$ deja X, apila Y, apila Z    (Nuevo tope Z)		
Si $\alpha = XX$ deja X, apila X    (Nuevo tope X)		
Si $\alpha = X$ deja X    (No altera la Pila)		
Si $\alpha = \varepsilon$ elimina X    (Desapila)		

## Autómatas de Pila Reconocedores

### Descripción instantánea

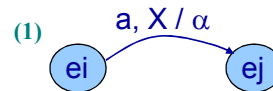
Una configuración de un AP es una tripla  $\langle e_i, a\omega, X\beta \rangle$  donde

estado actual  
a símbolo a leer,  $\omega$  resto cadena cinta  
X tope,  $\beta$  cadena debajo tope

Luego, se define una relación de transición |—

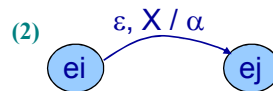
$$\langle e_i, a\omega, X\beta \rangle \stackrel{(1)}{|-} \langle e_j, \omega, \alpha\beta \rangle$$

con (1) lee el símbolo  $a$  y reemplaza el tope  $X$  por  $\alpha$ .



$$\langle e_i, a\omega, X\beta \rangle \stackrel{(2)}{|-} \langle e_j, a\omega, \alpha\beta \rangle$$

con (2), no lee el símbolo  $a$  y reemplaza el tope  $X$  por  $\alpha$ .



donde  $a \in A$ ;  $\omega \in A^*$ ;  $X \in P$ ;  $\alpha, \beta \in P^*$ ;  $e_i, e_j \in E$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Autómatas de Pila Reconocedores

### Cadena aceptada por AP

Una cadena  $\omega \in A^*$  es aceptada por  $AP = \langle E, A, P, \delta, e_0, Z_0, F \rangle$  sí y sólo sí

$$\langle e_0, \omega, Z_0 \rangle \stackrel{*}{|-} \langle e_f, \varepsilon, \alpha \rangle$$

Si comienza en el estado  $e_0$ , con pila vacía  $Z_0$  y luego de varias transiciones, llega a fin de cadena  $\varepsilon$  y en estado  $e_f \in F$ , la cadena es aceptada. En la pila puede quedar cualquier cadena  $\alpha \in P^*$

Luego, el lenguaje aceptado por el autómata de pila AP es:

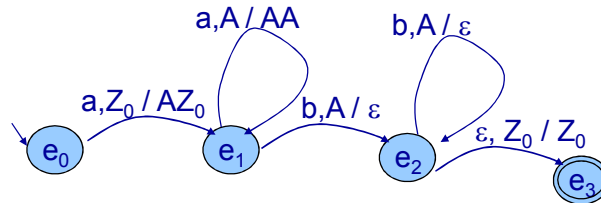
$$L(AP) = \{ \omega / \langle e_0, \omega, Z_0 \rangle \stackrel{*}{|-} \langle e_f, \varepsilon, \alpha \rangle \mid \omega \in A^* \text{ y } e_f \in F \text{ y } \alpha \in P^* \}$$

Los lenguajes aceptados por los **Autómatas de Pila** se denominan **Lenguajes Libres (Independientes) del Contexto** o de **Tipo 2**.

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Ejemplos

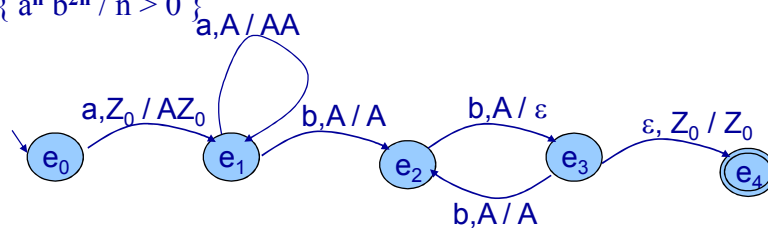
$$L_1 = \{ a^n b^n / n > 0 \}$$



$$APD = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\} \rangle$$

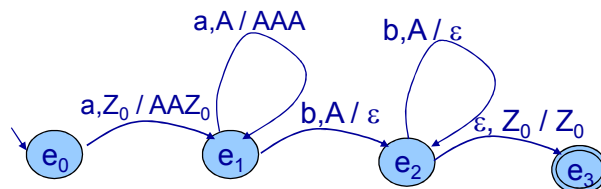
## Ejemplos

$$L_2 = \{ a^n b^{2n} / n > 0 \}$$



$$APD = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_4\} \rangle$$

Otra forma

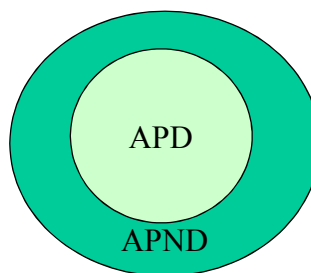


$$APD = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\} \rangle$$

## Autómatas de pila determinísticos y no determinísticos

Teorema:

Los APND tienen mayor poder de reconocimiento que los APD. Es decir, hay lenguajes libres del contexto que pueden ser reconocidos por un APND pero no por un APD.



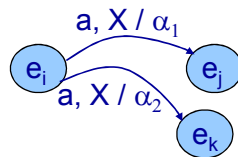
Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Casos de No Determinismo

APND =  $\langle E, A, P, \delta, e_0, Z_0, F \rangle$ , siendo  $\delta$  no determinística definida como:

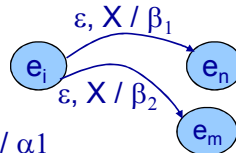
$\delta: E \times (A \cup \{\epsilon\}) \times P \rightarrow P_f(E \times P^*)$   $P_f$  denota los subconjuntos finitos de  $E \times P^*$

1)  $\delta(e_i, a, X) = \{(e_j, \alpha_1), (e_k, \alpha_2), \dots\}$



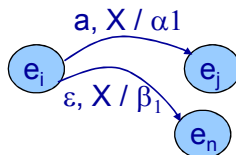
Si lee a, con tope X dos caminos

2)  $\delta(e_i, \epsilon, X) = \{(e_n, \beta_1), (e_m, \beta_2), \dots\}$



Si no lee cinta con tope X dos caminos

3) Combinadas (1) y (2)



Si lee a, y tope X un camino  
Si no lee a, y tope X otro camino

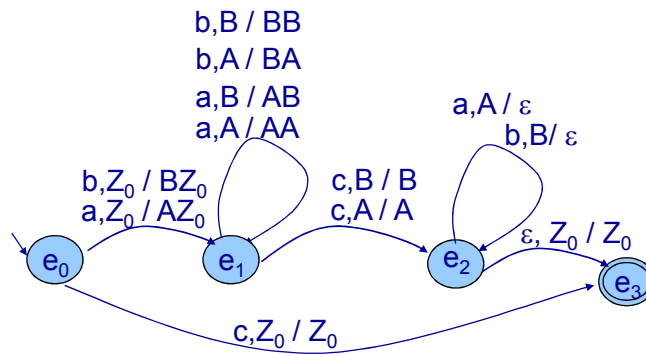
donde  $a \in A, X \in P, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in P^*, e_i, e_j, e_k \in E$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Ejemplo Lenguaje Libre del contexto determinístico

$$L_2 = \{ w c w^R / w \in \{a,b\}^* \}$$

Ejemplos  
Cadenas  
c  
abcba  
abbcbbba



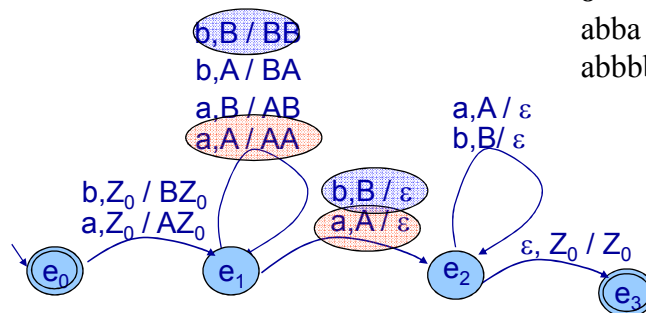
$$APD = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a, b, c\}, \{A, B, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\} \rangle$$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Ejemplo Lenguaje libre del contexto no determinístico

$$L_2 = \{ w w^R / w \in \{a,b\}^* \}$$

Cadenas  
ε  
abba  
abbbba



$$APND = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a, b, c\}, \{A, B, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\} \rangle$$

Para este lenguaje no existe una solución con AP determinístico

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009



## IDENTIFICAR EL LENGUAJE

---

- Si el lenguaje es libre del contexto No determinístico hacer APND
- Si el lenguaje es libre del contexto determinístico hacer APD (fijarse si agregaron transiciones que generan no determinismo y corregirlas)

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Autómatas de Pila Traductores

---

Formalmente, un AP traductor (APT) se define como una 9-tupla

$$AP_T = \langle E, A, P, \delta, e_i, F, Z_0, S, \gamma \rangle$$

donde  $E, A, P, \delta, e_i, Z_0, F$  se definen como antes y se agregan dos componentes

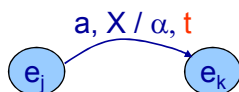
✓  $S$  es el alfabeto de salida

✓  $\gamma$  es la función de traducción;  $\gamma : E \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times P \rightarrow S^*$

$\gamma$  está definida siempre que  $\delta$  está definida.

Si existe  $\delta(e_j, a, X) = (e_k, \alpha)$  y además  $\gamma(e_j, a, X) = t$

donde  $e_j, e_k \in E; a \in A; X \in P; \alpha \in P^*; t \in S^*$



Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

## Autómatas de Pila Traductores

### Función de traducción para cadenas

El autómata sólo define la traducción, si el autómata AP subyacente “acepta” la cadena.

Es decir, la traducción  $T(\omega): A^* \rightarrow S^*$  asociada a  $AP_T$  está definida como:

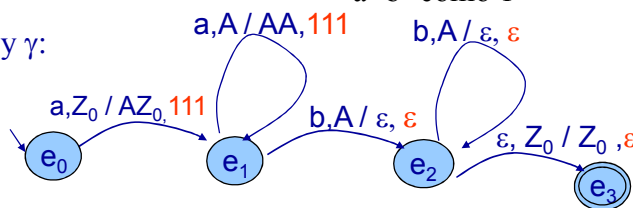
$T(\omega)$  es válida  $\Leftrightarrow \langle e_0, \omega, Z_0 \rangle \xrightarrow{*} \langle e_f, \varepsilon, \alpha \rangle$  donde  $\omega \in A^*$

### Ejemplo Autómata de pila traductor

$$L_1 = \{ a^n b^n / n > 0 \}$$

Supongamos traducir las cadenas  $a^n b^n$  como  $1^{3n}$

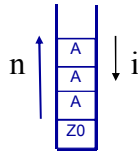
$\delta$  y  $\gamma$ :



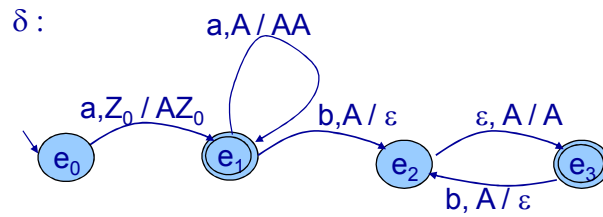
$$APT = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\}, \gamma, \{1\} \rangle$$

## Uso de la pila (CASO MAYOR $n > i$ )

$$L_1 = \{ a^n b^i / i \geq 0 \text{ y } n > i \}$$



Si  $n > i$  tiene que llegar a  $\epsilon$  en la cadena y quedar A's en la pila



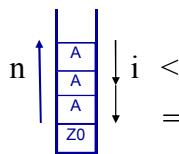
Ej. Cadenas

aaaa  
aaabb  
aaaab  
...

$$APD = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_1, e_3\} \rangle$$

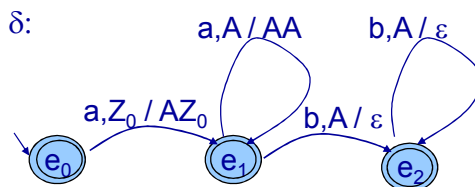
## Uso de la pila (CASO MAYOR IGUAL $n \geq i$ )

$$L_2 = \{ a^n b^i / i \geq 0 \text{ y } n \geq i \}$$



Ej. cadenas

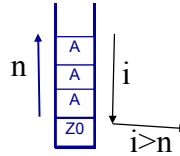
$\epsilon$   
aaa  
aab  
aabb  
aaaabb  
...



$$APD = \langle \{e_0, e_1, e_2\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_0, e_1, e_2\} \rangle$$

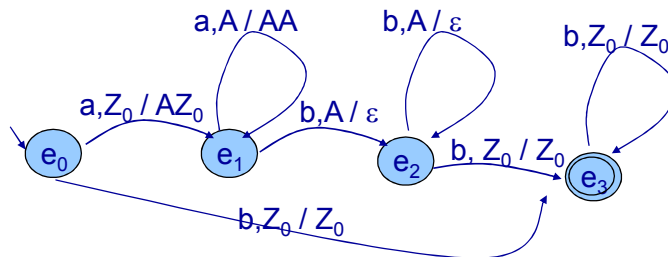
### Uso de la pila (CASO MENOR $n < i$ )

$$L_3 = \{ a^n b^i / n \geq 0 \text{ y } n < i \}$$



Ej. Cadenas  
bbb  
aabbb  
abb

$\delta$ :

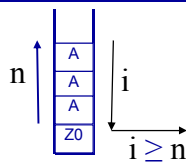


$$APD = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_3\} \rangle$$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

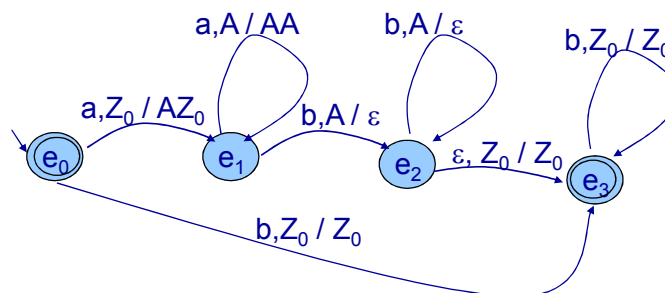
### Uso de la pila (CASO MENOR IGUAL $n \leq i$ )

$$L_4 = \{ a^n b^i / n \geq 0 \text{ y } n \leq i \}$$



Ej. cadenas  
 $\epsilon$   
bbbb  
aabb  
aabbb

$\delta$ :



$$APD = \langle \{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \{a, b\}, \{A, Z_0\}, \delta, e_0, Z_0, \{e_0, e_3\} \rangle$$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009