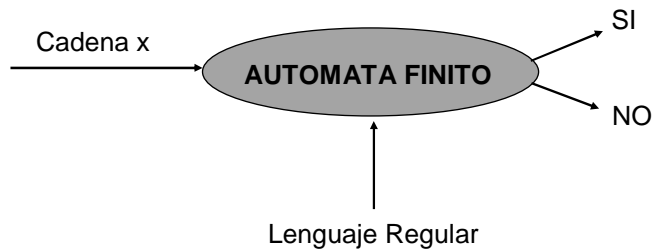


Autómatas Finitos y Lenguajes Regulares

Problema:

Dado un lenguaje L definido sobre un alfabeto A y una cadena x arbitraria, determinar si $x \in L$ o $x \notin L$.



Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos

- Un **Autómata Finito** es un modelo matemático de una máquina abstracta con entradas y salidas discretas.

- Dos puntos de vista:

- Como dispositivo **reconocedor** de la pertenencia de una cadena a un lenguaje regular.

- Como **traductor** de una cadena en otra.

- Un AF puede leer símbolos de una cinta, y puede estar en un número finito de estados.

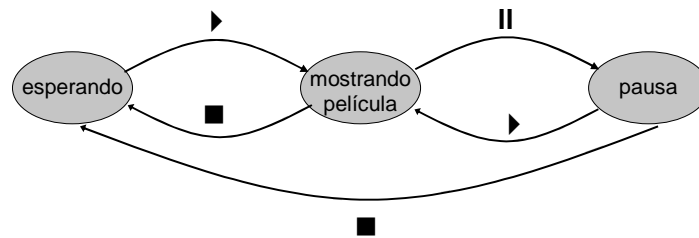
Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos

Aplicaciones:

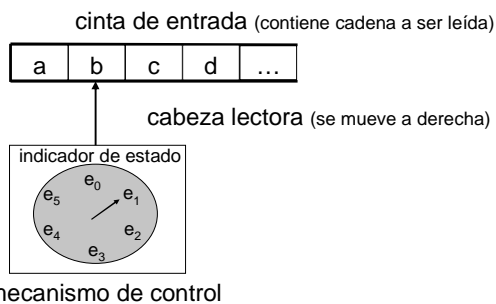
✓ Análisis de cadenas de caracteres (búsqueda de una cadena en un archivo de texto, reconocimiento de cadenas que satisfacen ciertos criterios, etc.)

✓ Reproductor de video, máquina expendedora de boletos, etc.



Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Reconocedores



Estados del AF:

- ✓ Cantidad finita.
- ✓ Representan la “memoria” del autómata.
- ✓ Un estado inicial.
- ✓ Al menos un estado final o de aceptación.

Dada una cadena x en la cinta de entrada, si el AF:

➤ **termina en un estado final**
→ **cadena aceptada**

➤ **termina en un estado no final**
→ **cadena rechazada**

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Reconocedores

$$L = \{ x / x \in \{a, b, c\}^* \text{ y } x \text{ termina en } b \}$$

Cadenas que pertenecen a L

b
ab
bb
cb
aab
bab
...

Cadenas que no pertenecen a L

ϵ
a
c
aa
ba
...

Dos situaciones para distinguir:

- el último símbolo leído es distinto de b
- el último símbolo leído es b

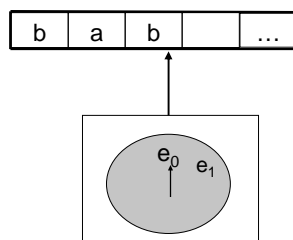
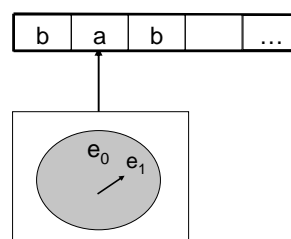
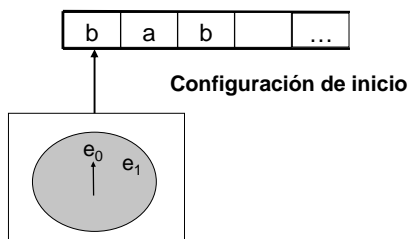
Dos estados:

e_0
 e_1

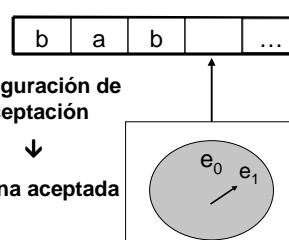
Autómatas Finitos Reconocedores

e_0 : estado inicial (último símbolo leído \neq b)

e_1 : estado final (último símbolo leído es b)

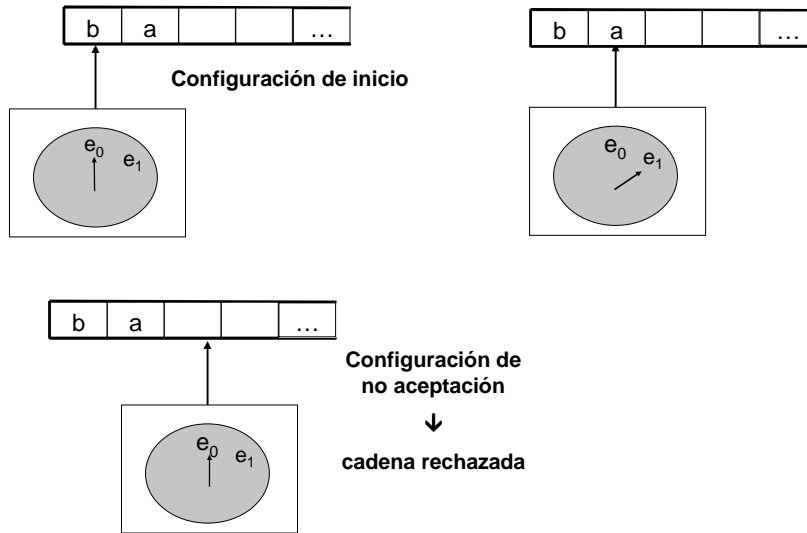


Configuración de aceptación
↓
cadena aceptada



Autómatas Finitos Reconocedores

e_0 : estado inicial (último símbolo leído \neq b) e_1 : estado final (último símbolo leído es b)



Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Reconocedores

Para definir un AF reconocedor es necesario indicar:

- ✓ el alfabeto de entrada: A
- ✓ el conjunto finito de estados: $E = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$
- ✓ de estos estados, un único estado inicial: e_0
- ✓ de estos estados, uno o varios estados finales: F
- ✓ una función de transición de estados: δ (indica a qué estado pasar luego de leer un símbolo en la cinta de entrada)

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Reconocedores

Formalmente, un AF reconocedor determinístico (AFD) se define como una quintupla

$$M = \langle E, A, \delta, e_i, F \rangle$$

- ✓ E es un conjunto finito de estados; $E \neq \emptyset$
- ✓ A es el alfabeto de entrada
- ✓ δ es la función de transición de estados; $\delta: E \times A \rightarrow E$
 $\delta(e_j, a) = e_k$ la máquina puede pasar del estado e_j al e_k después de leer el símbolo a en la cinta ($e_j, e_k \in E$; $a \in A$)
- ✓ e_i es el estado inicial; $e_i \in E$
- ✓ F es el conjunto de estados finales o de aceptación; $F \subseteq E$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Reconocedores

Un AF reconocedor determinístico se puede representar gráficamente usando un diagrama de transición de estados.

- cada estado $e_j \in E$



- estado inicial e_i

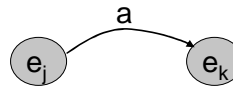


- cada estado final $e_f \in F$



- cada transición entre estados

$\delta(e_j, a) = e_k$ para $e_j, e_k \in E, a \in A$



Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

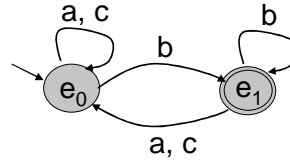
Autómatas Finitos Reconocedores

$L = \{ x / x \in \{a, b, c\}^* \text{ y } x \text{ termina en } b \}$

e_0 : estado inicial (último símbolo leído $\neq b$)

e_1 : estado final (último símbolo leído es b)

Diagrama de transición de estados



Descripción instantánea

$\alpha e_i \beta$ donde e_i estado actual, α cadena ya leída, β cadena que falta leer ($\alpha, \beta \in A^*$)

Ejemplos

$e_0abc b \mid ae_0bc b \mid abe_1cb \mid abce_0b \mid abcbe_1 \longrightarrow$ lee $abc b$ y termina en estado final.
Luego, $abc b \in L$

$e_0ba \mid be_1a \mid bae_0 \longrightarrow$ lee ba y termina en estado no final.
Luego, $ba \notin L$

Autómatas Finitos Reconocedores

$L = \{ x / x \in \{a, b, c\}^* \text{ y } x \text{ termina en } b \}$

Diagrama de transición de estados

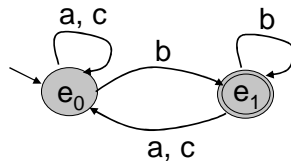


Tabla de transición de estados:

δ	a	b	c
e_0	e_0	e_1	e_0
e_1	e_0	e_1	e_0

Función δ

$\delta(e_0, a)=e_0$ $\delta(e_0, b)=e_1$ $\delta(e_0, c)=e_0$

$\delta(e_1, a)=e_0$ $\delta(e_1, b)=e_1$ $\delta(e_1, c)=e_0$

AFD = $\langle \{e_0, e_1\}, \{a, b, c\}, \delta, e_0, \{e_1\} \rangle$

El AFD = $\langle \{e_0, e_1\}, \{a, b, c\}, \delta, e_0, \{e_1\} \rangle$ acepta una cadena x si la secuencia de transiciones correspondientes a los símbolos de x conduce desde e_0 (el estado inicial) a e_1 (el único estado final).

Lenguaje aceptado por un AFD

Definición de δ^* (extensión de la función de transición para cadenas)

Sea $M = \langle E, A, \delta, e_i, F \rangle$ un AFD. Se define la función $\delta^*: E \times A^* \rightarrow E$

- $\delta^*(e_i, \epsilon) = e_i \quad e_i \in E$
- $\delta^*(e_i, xa) = \delta(\delta^*(e_i, x), a) \quad e_i \in E, x \in A^*, a \in A$

Una cadena x es aceptada por un AFD $M = \langle E, A, \delta, e_i, F \rangle$ si:

$$\delta^*(e_i, x) = e_f \quad \text{para algún } e_f \in F$$

Luego, el lenguaje aceptado por un AFD $M = \langle E, A, \delta, e_i, F \rangle$ es:

$$L(M) = \{ x / x \in A^* \text{ y } \delta^*(e_i, x) = e_f \text{ y } e_f \in F \}$$

Los lenguajes aceptados por los **Autómatas Finitos** se denominan **Lenguajes Regulares** o de **Tipo 3**.

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Diseño de Autómatas Finitos

↓ No es conveniente proceder por “prueba y error”, pueden cometerse dos tipos de errores:

- que “**sobren cadenas**”, es decir el AF acepta cadenas que no debería aceptar
- que “**falten cadenas**”, es decir el AF no acepta todas las cadenas del lenguaje considerado

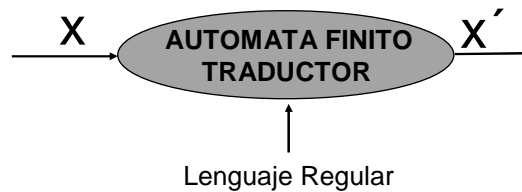
↑ Importante para un diseño sistemático:

- 1) Proponer un conjunto de estados que “recuerdan” condiciones importantes en el problema considerado
- 2) De estos estados, determinar cuál representa la condición inicial y cuál/cuáles la condición de aceptación
- 3) Proponer las transiciones que permiten pasar de un estado a otro

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Traductores

- Producen una salida diferente de SI o NO
- Permiten realizar “cálculos” a partir de una cadena de entrada → “traducen” una cadena de entrada en una cadena de salida



Ejemplos:

- AF que calcule la función $f(x) = 2x + 3$
- Analizador léxico de un compilador

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Traductores

Formalmente, un AF traductor determinístico (AFT) se define como una 7-tupla

$$M_T = \langle E, A, \delta, e_i, F, S, \gamma \rangle$$

- ✓ E es un conjunto finito de estados; $E \neq \emptyset$
- ✓ A es el alfabeto de entrada
- ✓ δ es la función de transición de estados; $\delta: E \times A \rightarrow E$
- ✓ e_i es el estado inicial; $e_i \in E$
- ✓ F es el conjunto de estados finales o de aceptación; $F \subseteq E$
- ✓ S es el alfabeto de salida
- ✓ γ es la función de traducción; $\gamma: E \times A \rightarrow S^*$

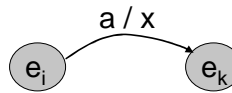
Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Traductores

Si existen $\delta(e_i, a) = e_k$ y $\gamma(e_i, a) = x$

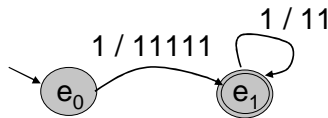
donde $e_i, e_k \in E; a \in A; x \in S^*$

se representa en el diagrama de transición de estados



Ejemplo:

Autómata finito traductor que calcula $f(x) = 2x + 3$ para $x \in \mathbb{N}, x > 0$, x representado en unario



Ejemplos

si $x = 1$ traduce 111111

si $x = 11$ traduce 11111111

si $x = 111$ salida 1^9

si $x = 11111$ salida 1^{13}

AFT = $\langle \{e_0, e_1\}, \{1\}, \delta, e_0, \{e_1\}, \{1\}, \gamma \rangle$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Traductores

Definición de γ^* (función de traducción para cadenas)

Sea $M_T = \langle E, A, \delta, e_0, F, S, \gamma \rangle$ un AFT. Se define la función

$\gamma^*: E \times A^* \rightarrow S^*$ tal que $\gamma^*(e_i, w)$ es la cadena que traducirá el autómata luego de leer w comenzando en e_i

• $\gamma^*(e_i, \epsilon) = \epsilon$

• $\gamma^*(e_i, wa) = \gamma^*(e_i, w) \cdot \gamma(\delta^*(e_i, w), a)$ $e_i \in E, w \in A^*, a \in A$

Nota:

El autómata solo define la traducción, si el autómata finito reconocedor subyacente "acepta" la cadena.

Es decir, la traducción $T(w): A^* \rightarrow S^*$ asociada a M_T está definida como:

$T(w) = \gamma^*(e_0, w) \Leftrightarrow \delta^*(e_0, w) \in F$ donde $w \in A^*$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

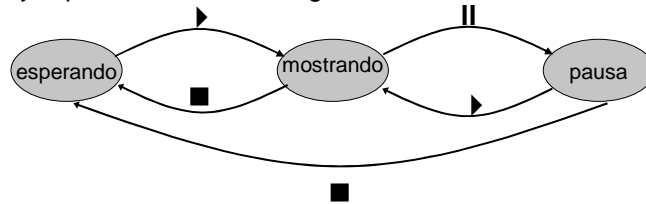
Autómatas Finitos Modelos

Formalmente, un AF modelo se define como una 3-upla

$$M_M = \langle E, A, \delta \rangle$$

- ✓ E es un conjunto finito de estados; $E \neq \emptyset$
- ✓ A es el alfabeto de entrada
- ✓ δ es la función de transición de estados; $\delta: E \times A \rightarrow E$

- Ejemplo Modelo de Videgrabadora



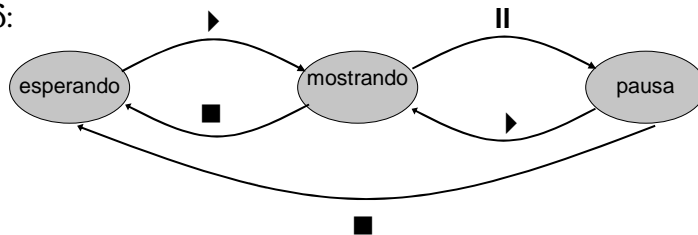
$$M_M = \langle \{\text{esperando, mostrando, pausa}\}, \{\triangleright, \parallel, \blacksquare\}, \delta \rangle$$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Autómatas Finitos Modelos

- Ejemplo Modelo de Videgrabadora

δ :



$$M_M = \langle \{\text{esperando, mostrando, pausa}\}, \{\triangleright, \parallel, \blacksquare\}, \delta \rangle$$

Ciencias de la Computación I - Filminas de Clase - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009